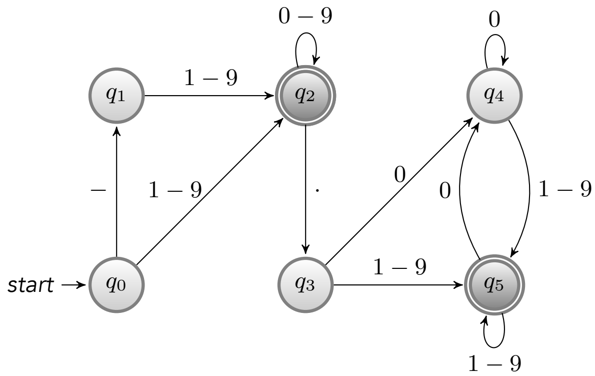
Fondamenti dell'Informatica	1 semestre
Prova scritta di esame del 21-6-2017	
Prof. Giorgio Gambosi	*a.a. 2016-2017*

Ad ogni quesito proposto è associato il numero di punti ottenuti in caso di risposta corretta ed esaustiva. Risposte parziali possono portare all'attribuzione di una frazione di tale punteggio. Spiegare in modo chiaro ed esauriente i passaggi effettuati.

Il punteggio finale della prova risulta come somma dei punteggi acquisiti per i vari quesiti.

Quesito 1 (6 punti):Definire un automa a stati finiti deterministico che riconosca tutte e sole le stringhe che rappresentano numeri secondo il seguente formato: un segno $-$ opzionale seguito da una sequenza di almeno una cifra decimale, non iniziante per 0, o un segno $-$ opzionale seguito da una sequenza di almeno una cifra decimale, non iniziante per 0, un punto e una sequenza di almeno una cifra decimale, non terminante per 0.

Soluzione: *Il linguaggio è riconosciuto dall'automa deterministico*

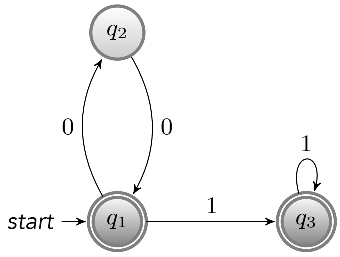


Quesito 2 (7 punti):Si consideri il linguaggio

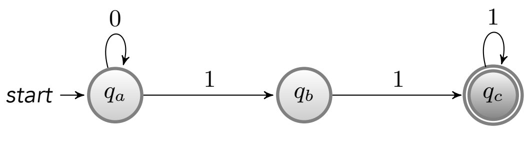
$$L = \{0^i1^j | i \text{ pari o } 0, \text{ oppure} j \geq 2\}$$

Il linguaggio è regolare o context free? Dimostrare quale delle due affermazioni è vera. Si definisca inoltre una grammatica (di tipo 3 o di tipo 2, rispettivamente) che generi tutte e sole le stringhe del linguaggio.

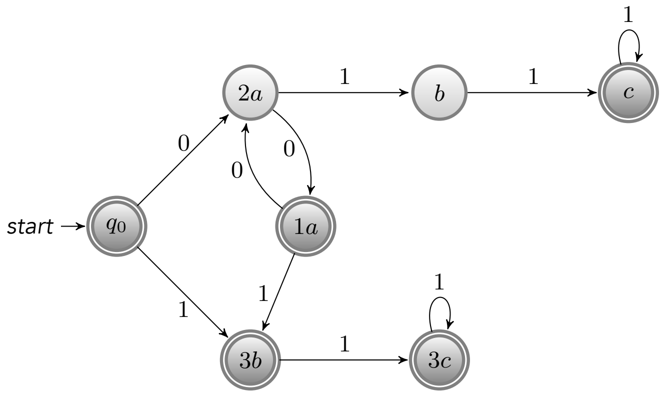
Soluzione: *Il linguaggio è regolare, unione di* $L_1 = \{0^i1^j | i \text{ pari o } 0\}$ *e* $L_2 = \{0^i1^j | j \geq 2\}$, *regolari in quanto* L_1 *è riconoscibile da*



e L_2 *è riconoscibile da*



La composizione dei due automi permette di ottenere l'ASF che riconosce L



da cui la grammatica che genera L

$$
\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & 0A_{2a}|1A_{3b}|1|\varepsilon \\
A_{2a} & \rightarrow & 0A_{1a}|1A_b|0 \\
A_{3b} & \rightarrow & 1A_{3c}|1 \\
A_{1a} & \rightarrow & 0A_{2a}|1A_{3b}|0|1 \\
A_b & \rightarrow & 1A_c|1 \\
A_c & \rightarrow & 1A_c|1 \\
A_{3c} & \rightarrow & 1A_{3c}|1
\end{array}
$$

Quesito 3 (6 punti): Si consideri la seguente operazione $\mathcal{I}()$ definita come:

$$\mathcal{I}(L) = \{x_1x_2\cdots x_k | k \geq 1, x_i \in L \text{ per } i = 1, \ldots, k\}$$

Mostrare che la classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto a $\mathcal{I}()$.

Soluzione: *Si considerino i linguaggi, per $k \geq 1$*

$$L_k = \{x_1x_2\cdots x_k | x_i \in L \text{ per } i = 1, \ldots, k\}$$

Se L è regolare allora ogni L_k è regolare in quanto $L_k = L^k$, potenza k-esima di L, e i linguaggi regolari sono chiusi rispetto alla concatenazione (e quindi alla potenza).

Ma $\mathcal{I}(L) = \cup_{k\geq 1} L_k$, per cui se L è regolare $\mathcal{I}(L)$ è l'unione di linguaggi regolari: per la chiusura dei linguaggi regolari rispetto all'unione, ne deriva che $\mathcal{I}(L)$ è regolare se lo è L.

Quesito 4 (7 punti):Si consideri il linguaggio

$$L = \{0^i1^j | i \geq j\}$$

Il linguaggio è regolare o context free? Dimostrare quale delle due affermazioni è vera. Si definisca inoltre una grammatica (di tipo 3 o di tipo 2, rispettivamente) che generi tutte e sole le stringhe del linguaggio.

Soluzione: *Il linguaggio non è regolare, ma è context free. Per verificare che non è regolare si può utilizzare il pumping lemma applicato (fissato n)alla stringa $0^n1^n \in L$. Dato che per ogni $uvx = 0^n1^n$ con $|uv| \leq n$ e $|v| \geq 1$ si deve avere necessariamente che $v = 0^k$ per un qualche $k > 0$, si che $uv^0w = uv = 0^{n-k}1^k \notin L$, per cui L non è regolare.*

Una grammatica CF che genera L è ad esempio

$$
\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & 0S1|0T1|\varepsilon \\
T & \rightarrow & 0T|0
\end{array}
$$

Quesito 5 (6 punti): Si definiscano una grammatica in CNF e una grammatica in GNF che generino il linguaggio L composto da tutte le stringhe su $\Sigma = \{0,1\}$ che iniziano e terminano per lo stesso carattere.

Soluzione: *Una grammatica CF che genera L è ad esempio*

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & 0T0|1T1|00|11 \\ T & \rightarrow & 0T|1T|0|1 \end{array}$$

La grammatica è già in forma ridotta.
Una grammatica in CNF risultante è allora

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & XZ|YU|ZZ|UU \\ T & \rightarrow & ZT|UT|0|1 \\ X & \rightarrow & ZT \\ Y & \rightarrow & UT \\ Z & \rightarrow & 0 \\ U & \rightarrow & 1 \end{array}$$

e una grammatica in GNF è

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & 0TZ|1TU|0Z|1U \\ T & \rightarrow & 0T|1T|0|1 \\ X & \rightarrow & 0T \\ Y & \rightarrow & 1T \\ Z & \rightarrow & 0 \\ U & \rightarrow & 1 \end{array}$$