Fondamenti dell'Informatica 1 semestre

Prova scritta di esonero del 15-2-2017

Prof. Giorgio Gambosi *a.a. 2016-2017*

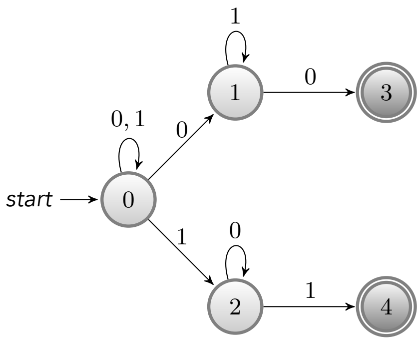
Ad ogni quesito proposto è associato il numero di punti ottenuti in caso di risposta corretta ed esaustiva. Risposte parziali possono portare all'attribuzione di una frazione di tale punteggio. Spiegare in modo chiaro ed esauriente i passaggi effettuati.

Il punteggio finale della prova risulta come somma dei punteggi acquisiti per i vari quesiti.

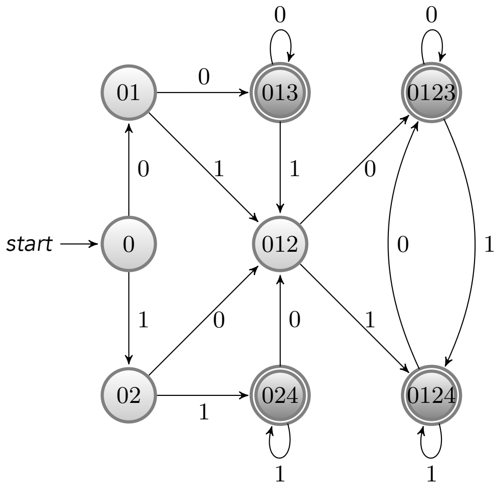
Quesito 1 (6 punti): Definire un ASFD che riconosca il linguaggio

$$L = \{w \in \{0,1\}^+ | \text{ l'ultimo carattere di } w \text{ è già apparso nella stringa}\}$$

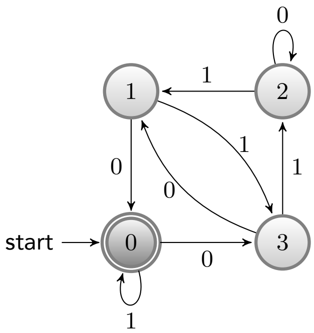
Soluzione: *È utile definire inizialmente un ASFND che accetti L, come ad esempio*



L'AFD cercato può essere derivato dal precedente, ottenendo



Quesito 2 (6 punti): Definire una espressione regolare che descriva il linguaggio riconosciuto dal seguente ASFD



Soluzione: *Una possibile soluzione prevede la derivazione della grammatica regolare equivalente*

$$\begin{array}{lcl} A_0 & \to & 1A_0|0A_3|1 \\ A_1 & \to & 0A_0|1A_3|0 \\ A_2 & \to & 0A_2|1A_1 \\ A_3 & \to & 0A_1|1A_2 \end{array}$$

E da questa, manipolando il sistema di epressioni corrispondente, l'espressione regolare cercata.

$$\begin{cases} A_0 = 1A_0 + 0A_3 + 1 \\ A_1 = 0A_0 + 1A_3 + 0 \\ A_2 = 0A_2 + 1A_1 \\ A_3 = 1A_1 + 1A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 = 1A_0 + 0(1A_1 + 1A_2) + 1 \\ A_1 = 0A_0 + 1(1A_1 + 1A_2) + 0 \\ A_2 = 0A_2 + 1A_1 \\ A_3 = 1A_1 + 1A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 = 1A_0 + 0(1 + 10^*1)A_1 + 1 \\ A_1 = 0A_0 + 1(1 + 10^*1)A_1 + 0 \\ A_2 = 0^*1A_1 \\ A_3 = 1A_1 + 1A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 = 1A_0 + 0(1 + 10^*1)(1(1 + 10^*1))^*(0A_0 + 0) + 1 \\ A_1 = (1(1 + 10^*1))^*(0A_0 + 0) \\ A_2 = 0^*1A_1 \\ A_3 = 1A_1 + 1A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 = (1 + 0(1 + 10^*1)(1(1 + 10^*1))^*0)A_0 + 0(1 + 10^*1)(1(1 + 10^*1))^*0 + 1 \\ A_1 = (1(1 + 10^*1))^*(0A_0 + 0) \\ A_2 = 0^*1A_1 \\ A_3 = 1A_1 + 1A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 = (1 + 0(1 + 10^*1)(1(1 + 10^*1))^*0)^*(0(1 + 10^*1)(1(1 + 10^*1))^*0 + 1) \\ A_1 = (1(1 + 10^*1))^*(0A_0 + 0) \\ A_2 = 0^*1A_1 \\ A_3 = 1A_1 + 1A_2 \end{cases}$$

Quindi il linguaggio è descritto dall'espressione regolare

$$(1 + 0(1 + 10^*1)(1(1 + 10^*1))^*0)^*(0(1 + 10^*1)(1(1 + 10^*1))^*0 + 1)$$

Quesito 3 (7 punti): Mostrare che il linguaggio

$$L = \{ww|w \in \{a,b\}^*\}$$

non è regolare.

Soluzione: *È sufficiente utilizzare il pumping lemma per i linguaggi regolari.*

Dato n, scegliamo ad esempio la stringa $\sigma = a^n b^n a^n b^n$. Qualunque decomposizione $\sigma = uvw$ che soddisfi i vincoli posti dal pumping lemma ($|uv| \leq n$, $|v| > 0$) dovrà essere tale che $uv = a^k$ per qualche $k \leq n$. Di conseguenza, $v = a^h$ per $1 \leq h \leq k$ e, considerando la stringa $\sigma' = uv^2w$, si può osservare che $\sigma' = a^{n+h}b^n a^n b^n \notin L$.

Quesito 4 (7 punti): Definire un automa a pila che accetti il linguaggio

$$L = \{w \in \{a,b\}^+ | \#_a(w) \geq \#_b(w)\}$$

Dove $\#_c(x)$ indica il numero di occorrenze del carattere c nella stringa x.

Soluzione: *L'automa non deve fare altro che mantenere traccia, sulla pila, della differenza tra il numero di caratteri a e il numero di caratteri b letti fino a ora (o vice versa, a seconda che siano stati letti più a o più b). La stringa è accettata se al termine della sua lettura la pila è vuota o contiene tutti simboli A. Per accettare per pila vuota l'automa prevede che in qualunque istante in cui il numero di a lette è almeno pari al numero di b possa entrare in uno stato q_1 di svuotamento della pila.*

	(q_0, Z_0)	(q_0, A)	(q_0, B)	(q_1, Z_0)	(q_1, A)
a	(q_0, AZ_0)	(q_0, AA)	(q_0, ε)	-	-
b	(q_0, BZ_0)	(q_0, ε)	(q_0, BB)	-	-
ε	(q_1, ε)	(q_1, ε)	-	(q_1, ε)	(q_1, ε)

Quesito 5 (7 punti): Sia L il linguaggio generato dalla seguente grammatica context free

$$S \rightarrow \varepsilon|0S1S|1S0S$$

derivare una grammatica in Forma Normale di Greibach che generi $L - \{\varepsilon\}$.

Soluzione: *Il primo passo prevede la derivazione della grammatica in forma ridotta equivalente.*

Eliminazione delle ε produzioni:

$$S \rightarrow 0S1S|1S0S|01S|0S1|01|1S0|10S|10$$

Non ci sono produzioni unitarie o simboli inutili.

Forma normale di Chomsky:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & XY|YX|ZY|XU|ZU|YZ|UX|UZ \\ X & \rightarrow & ZS \\ Y & \rightarrow & US \\ Z & \rightarrow & 0 \\ U & \rightarrow & 1 \end{array}$$

Forma normale di Greibach:

- *dopo la prima fase*

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & XY|YX|ZY|XU|ZU|YZ|UX|UZ \\ X & \rightarrow & ZS \\ Y & \rightarrow & US \\ Z & \rightarrow & 0 \\ U & \rightarrow & 1 \end{array}$$

- *dopo la seconda fase*

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & 0SY|1SX|0Y|1U|0U|0Z|1X|1Z \\
X & \rightarrow & 0S \\
Y & \rightarrow & 1S \\
Z & \rightarrow & 0 \\
U & \rightarrow & 1
\end{array}
$$