Fondamenti dell'Informatica 1 semestre

Prova scritta di esonero del 28-2-2017

Prof. Giorgio Gambosi *a.a. 2016-2017*

Ad ogni quesito proposto è associato il numero di punti ottenuti in caso di risposta corretta ed esaustiva. Risposte parziali possono portare all'attribuzione di una frazione di tale punteggio. Spiegare in modo chiaro ed esauriente i passaggi effettuati.

Il punteggio finale della prova risulta come somma dei punteggi acquisiti per i vari quesiti.

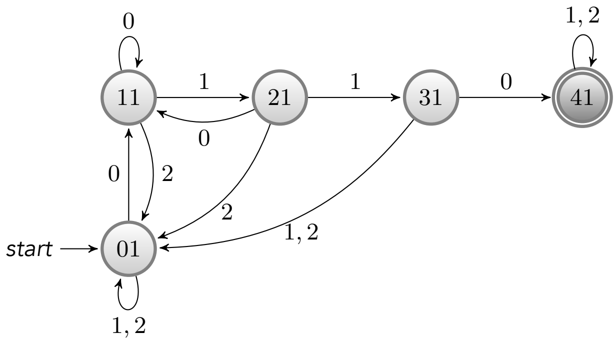
Quesito 1 (6 punti): Definire un ASFND che accetti il seguente linguaggio

$$L = \{w \in \{0,1,2\}^+\}$$

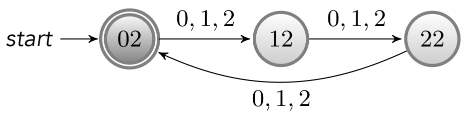
dove:

- 0110 compare in w e inoltre:
  - $|w|$ è un multiplo di 3 oppure
  - 22 non compare in w

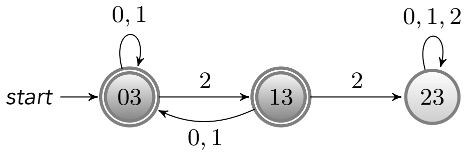
Soluzione: *Automa $\mathcal{A}_1$, riconosce le stringhe che includono 0110 come sottostringa*



Automa $\mathcal{A}_2$, riconosce le stringhe di lunghezza pari a un multiplo di 3



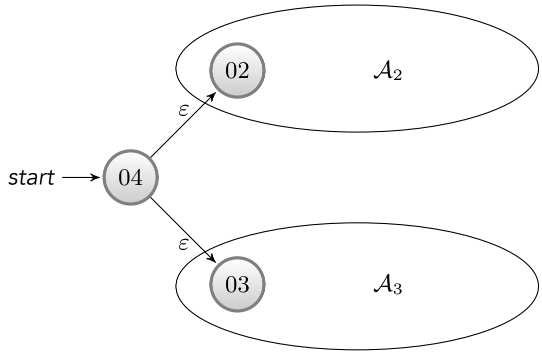
Automa $\mathcal{A}_3$, riconosce le stringhe che non contengono 22 come sottostringa



L'ASFND richiesto può essere ottenuto a partire da questi nel modo seguente, tenendo conto che

$$L = \overline{\overline{L(\mathcal{A}_1)} \cup \overline{(L(\mathcal{A}_2) \cup L(\mathcal{A}_3))}}$$

1. *$L(\mathcal{A}_2) \cup L(\mathcal{A}_3)$ viene accettato dall'ASFND $\mathcal{A}_4$ ottenuto applicando la nota composizione per l'unione di due linguaggi*



2. *$\overline{L(\mathcal{A}_2) \cup L(\mathcal{A}_3)}$ viene riconosciuto dall'automa $\mathcal{A}_5$ ottenuto a partire dall'ASFD equivalente a $\mathcal{A}_4$, invertendo stati finali e non finali*
3. *$\overline{L(\mathcal{A}_1)}$ viene riconosciuto dall'automa $\mathcal{A}_6$ ottenuto invertendo stati finali e non finali di $\mathcal{A}_1$*
4. *$\overline{L(\mathcal{A}_1)} \cup (\overline{L(\mathcal{A}_2) \cup L(\mathcal{A}_3)})$ viene accettato dall'ASFND $\mathcal{A}_7$ ottenuto applicando la stessa composizione precedente a $\mathcal{A}_5$ e $\mathcal{A}_6$*
5. *L'ASFND voluto può essere ottenuto da $\mathcal{A}_7$ derivandone l'ASFD equivalente e scambiando stati finali e non.*

Quesito 2 (8 punti): Mostrare se il seguente linguaggio è o meno context free:

$$L = \{w_1 w_2 w_3 : w_1 \in \{a,b\}^+, w_2 \in \{c,d\}^+, w_3 \in \{e,f\}^+, |w_1| = |w_2| = |w_3|\}$$

Soluzione: *Il linguaggio non è context-free. Per dimostrare cioò utilizziamo il pumping lemma per i linguaggi di tipo 2.*

Dato n, consideriamo la stringa $\sigma = a^n c^n e^n$. Se consideriamo le decomposizioni $\sigma = uvwxy$ con $|vwx| \leq n$ e $|vx| \geq 1$ si hanno due casi possibili:

- *sia v che x sono sequenze di stessi caratteri (ad esempio $v = a^k$ e x=c^h): si osservi che in tal caso uno dei tre caratteri che compaiono in σ non compare in vx. Di conseguenza la stringa $\sigma' = uv^2wx^2y$ non presenta lo stesso numero di a, c ed e, e quindi non appartiene al linguaggio. Si osservi che come caso particolare si ha $v = \varepsilon$ o $x = \varepsilon$: la conclusione deriva anche in questo caso.*
- *almeno una tra v e x non è una sequenza di stessi caratteri (ad esempio, $v = a^h c^k$): in tal caso, $v^2 = a^h c^k a^h c^k$ e $\sigma' = uv^2wx^2y$ non appartiene al linguaggio.*

In conclusione, dato che per ogni decomposizione possibile di σ, che soddisfi le condizioni del pumping lemma, si ha $\sigma \notin L$, concludiamo che L non è context free.

Quesito 3 (6 punti): Sia dato un automa a stati finiti deterministico $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ con

1. $\Sigma = \{a, b\}$
2. $Q = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3. $q_0 = 0$
4. $F = \{2, 3, 5, 6\}$

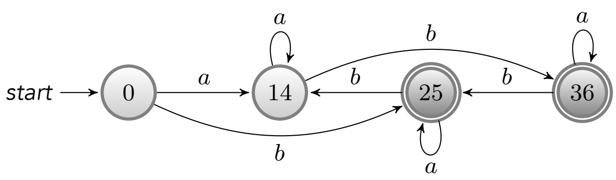
e δ descritta dalla seguente tabella di transizione

	0	1	2	3	4	5	6
a	1	1	2	6	4	5	3
b	5	6	4	5	3	4	2

Derivare un automa $\mathcal{A}'$ equivalente ad $\mathcal{A}$ con minimo numero di stati

Soluzione: *Applicando la procedura nota per l'individuazione di coppie di stati equivalenti, derivano le seguenti classi di equivalenza: $\{0\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 6\}$.*

L'automa minimo sarà:



Quesito 4 (8 punti): Definire una grammatica in forma normale di Greibach che generi il linguaggio

$$L = \{a^m b^n | m \neq n\}$$

Soluzione: *Il linguaggio può essere generato dalla grammatica*

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & aSb|A|B \\ A & \rightarrow & aA|a \\ B & \rightarrow & bB|b \end{array}$$

La grammatica non ha ε-produzioni. L'eliminazione delle produzione unitarie fornisce:

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & aSb|aA|bB|a|b \\ A & \rightarrow & aA|a \\ B & \rightarrow & bB|b \end{array}$$

Dato non ci sono simboli inutili, la grammatica è in forma ridotta. In forma normale di Chomsky,

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & WY|XA|YB|a|b \\ A & \rightarrow & XA|a \\ B & \rightarrow & YB|b \\ W & \rightarrow & XS \\ X & \rightarrow & a \\ Y & \rightarrow & b \end{array}$$

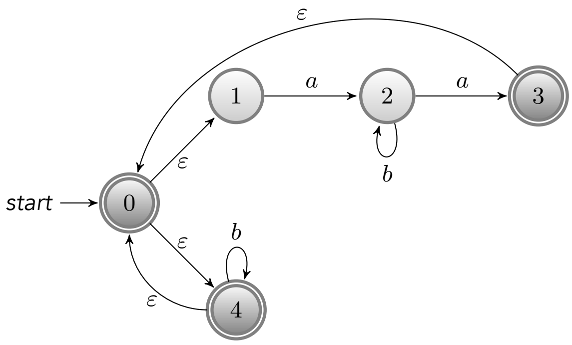
La grammatica in forma normale di Greibach deriva immediatamente se consideriamo l'ordinamento S, A, B, W, X, Y dei non terminali, e risulta essere:

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & aSY|aA|bB|a|b \\ A & \rightarrow & aA|a \\ B & \rightarrow & bB|b \\ W & \rightarrow & aS \\ X & \rightarrow & a \\ Y & \rightarrow & b \end{array}$$

Quesito 5 (5 punti): Derivare un ASFD che riconosca il linguaggio descritto dall'espressione regolare

$$(ab^*a + b^*)^*$$

Soluzione: *Per composizione, possiamo derivare l'ASFND con ε-transizioni che accetta il linguaggio*



Eliminando le ε-transizioni, otteniamo il seguente ASFND, che risulta in effetti deterministico