

ESERCIZIO 1

Si consideri il seguente tableau ottimo di un problema di programmazione lineare

-25/3	0	4/3	19/6	9/2	0	0	0	7/6
1	0	1	-1/2	-3/2	1	0	0	3/2
11/3	1	-2/3	-1/3	0	0	0	0	2/3
2/3	0	1/3	1/6	-1/2	0	1	0	7/6
1	0	-3	1/2	9/2	0	0	1	-15/2

- Quanto vale la funzione obiettivo? Quali sono le variabili in base e quanto valgono? S: [25/3]

Sia b_1^* il valore ottimo della variabile x_1 . Si aggiunga al problema il vincolo $x_1 \leq [b_1^*]$ (intero inferiore).

- Quanto vale la nuova soluzione ottima? S: [14]
- Cosa accade se il vincolo aggiunto è del tipo $x_5 \leq [b_5^*]$? S: [25/3]

ESERCIZIO 2

Trasformare i seguenti problemi di programmazione lineare in forma standard

$$\min x_1 - 5x_2 - 7x_3$$

$$5x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geq 5$$

$$3x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 3$$

$$7x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 9$$

$$x_1 \geq -2$$

$$x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

$$\min 5x_1 + 3x_2 - 7x_3$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 11$$

$$3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 11$$

$$x_1, x_2, x_4 \geq 0$$

$$x_3 \in \mathbb{R}$$

ESERCIZIO 3

Dato il problema di programmazione lineare

$$\min 8x_1 + x_2 - 3x_3$$

$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \leq 10$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Calcolare:

- la soluzione ottima del problema primale
- il vettore dei costi ridotti delle variabili fuori base

S: [-26/3]
S: [29/3, 2/3, 1/3]

- la formulazione del problema duale
- la soluzione ottima del problema duale attraverso il teorema degli scarti complementari

S: [2/3, 1/3]

ESERCIZIO 4

Risolvere i seguenti problemi di PL con il metodo ritenuto più opportuno

$$\max 60x_1 + 30x_2$$

$$3x_1 + 3x_2 \leq 420$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 440$$

$$x_1 \leq 80$$

$$x_1, x_2, \geq 0$$

S: [6600]

$$\max 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$3x_2 + 5x_3 \leq 30$$

$$2x_1 + x_2 \leq 20$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 50$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

S: [68]

$$\max x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5$$

$$x_1 \leq 20 + x_5$$

$$x_1 \leq 30 - x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_4 \leq 10$$

$$x_2 + x_5 \leq x_3 + x_4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

S: [330]

$$\max 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

S: [56]

ESERCIZIO 5

Dato il problema di programmazione lineare

$$\min 2x_1 - 14x_2 - 7x_3$$

$$-5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 8$$

$$7x_1 + 8x_2 - 2x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Calcolare:

- la soluzione ottima del problema primale
- il vettore dei costi ridotti delle variabili fuori base
- la formulazione del problema duale
- la soluzione ottima del problema duale attraverso il teorema degli scarti complementari

S: [-22]

S: [3/2, 3/2, 1]

S: [3/2, 1]

ESERCIZIO 6

Dato il problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min & 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 5x_4 \geq 13 \\ & x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

scrivere la formulazione del problema duale e verificare, attraverso il teorema degli scarti complementari, se la soluzione $x^T = [\frac{7}{3}, 0, \frac{4}{5}, 0]$ è ottima. S: [NO]

ESERCIZIO 7

Risolvere mediante il metodo del simplesso il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min & 2x_1 - x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + 3x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2, \geq 0 \end{aligned}$$

Indicare per ciascuna soluzione di base ammissibile il valore delle variabili e dei costi ridotti. Rappresentare graficamente il problema evidenziando i vertici della regione individuati dal metodo del simplesso.

ESERCIZIO 8

Dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min & 2x_1 - x_2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & x_1 - 2x_2 - x_4 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

determinare la soluzione di base ammissibile associata in cui le variabili in base sono x_1 e x_2 . Dire se si tratta di una soluzione ottima e scrivere il relativo tableau. S: [NO]

ESERCIZIO 9

Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min & -x_1 - x_2 \\ & -x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ & 3x_1 + x_2 \leq -1 \\ & x_1 \in \mathbb{R} \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Dire se la soluzione ottima è unica.

ESERCIZIO 10

Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min & -x_1 + x_2 \\ & -x_1 + 2x_2 \geq 1/2 \\ & -2x_1 - 2x_2 \geq 1 \\ & x_1 \in \mathbb{R} \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ESERCIZIO 11

Dato il problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 \\ & 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 \geq 16 \\ & x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

scrivere la formulazione del problema duale e verificare, attraverso il teorema degli scarti complementari, se la soluzione $x^T = [\frac{7}{2}, 0, \frac{3}{5}, 0]$ è ottima. S: [NO]

ESERCIZIO 12

Sfruttando la teoria della dualità, trovare la soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{aligned} \min & 12x_1 + 20x_2 + 10x_3 \\ & 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 \leq 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

S: [0]

ESERCIZIO 13

Si determini la soluzione ottima del duale del seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max & 12x_1 + 20x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ & -3x_1 + 5x_2 \leq 240 \\ & x_1 \leq 40 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

sapendo che la soluzione ottima del primale è $x^* = (20, 60)$

S: [28/13, 120/13, 0]

ESERCIZIO 14

Sfruttando la teoria della dualità, trovare la soluzione ottima del seguente problema

$$\min 12x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 7x_4$$

$$8x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 5x_4 \geq 20$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

S: [28]

ESERCIZIO 15

Risolvere il seguente problema di programmazione lineare mediante il metodo del simplesso duale

$$\min 3x_1 + 2x_2$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

S: [3/2]

ESERCIZIO 16

Risolvere col metodo primale-duale i seguenti problemi

$$\min x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 5x_4$$

$$5x_1 - 4x_2 + 13x_3 + x_4 = 20$$

$$x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

S: [-60/7]

$$\min 2x_1 + x_2 + 4x_3$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

S: [5]

ESERCIZIO 17

Risolvere il seguente problema di programmazione lineare mediante il metodo del simplesso duale

$$\min 5x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + x_3 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

S: [9]

ESERCIZIO 18

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$\min -x_1 - 4x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$3x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Utilizzare l'algoritmo del simplesso primale e l'algoritmo del simplesso duale per rispondere ai seguenti quesiti.

- Quanto vale la soluzione ottima del problema se si considera solo il primo vincolo della formulazione? S: [-8]
- Come cambia il valore ottimo se si considerano i primi due vincoli? S: [-4]
- Qual è la soluzione ottima del problema considerando tutti i vincoli? S: [-11/3]

ESERCIZIO 19

Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max & 2x_1 + 5x_2 \\ & x_1 - 4x_2 \leq 8 \\ & -x_1 + x_2 \leq 6 \\ & -3x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

In base alla teoria della dualità, cosa è possibile dire sul problema duale?

ESERCIZIO 20

Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max & -2x_1 - x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 - 3x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Fare uso sia della fase uno del metodo del simplesso che del simplesso duale e confrontare i due algoritmi.