Fondamenti dell'Informatica 1 semestre

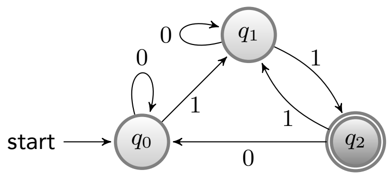
Prova scritta di esame del 9-2-2018

Prof. Giorgio Gambosi *a.a. 2017-2018*

Ad ogni quesito proposto è associato il numero di punti ottenuti in caso di risposta corretta ed esaustiva. Risposte parziali possono portare all'attribuzione di una frazione di tale punteggio. Spiegare in modo chiaro ed esauriente i passaggi effettuati.

Il punteggio finale della prova risulta come somma dei punteggi acquisiti per i vari quesiti.

Quesito 1 (7 punti): Sia L il linguaggio riconosciuto dal seguente ASFD,



derivare una espressione regolare che descriva L.

Soluzione: *Una possibile soluzione prevede la derivazione della grammatica regolare equivalente*

$$\begin{array}{lcl} A_0 & \to & 0A_0|1A_1 \\ A_1 & \to & 0A_1|1A_2|1 \\ A_2 & \to & 0A_0|1A_1 \end{array}$$

E da questa, manipolando il sistema di espressioni corrispondente, l'espressione regolare cercata.

$$\begin{cases} A_0 = 0A_0 + 1A_1 \\ A_1 = 0A_1 + 1A_2 + 1 \\ A_2 = 0A_0 + 1A_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 = 0A_0 + 1A_1 \\ A_1 = 0A_1 + 1A_0 + 1 \\ A_2 = A_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 = 0^*1A_1 \\ A_1 = 0A_1 + 10^*1A_1 + 1 \\ A_2 = A_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 = 0^*1A_1 \\ A_1 = (0 + 10^*1)A_1 + 1 \\ A_2 = A_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 = 0^*1A_1 \\ A_1 = (0 + 10^*1)^*1 \\ A_2 = A_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 = 0^*1(0 + 10^*1)^*1 \\ A_1 = (0 + 10^*1)^*1 \\ A_2 = A_0 \end{cases}$$

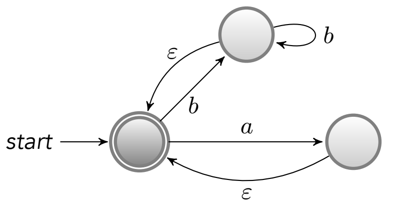
L è descritto dall'espressione associata all'assioma, e quindi da $0^*1(0 + 10^*1)^*1$.

Quesito 2 (7 punti): Si consideri il linguaggio $L = \{a^h b^k | k > h > 0\}$. Dimostrare se L è regolare o meno.

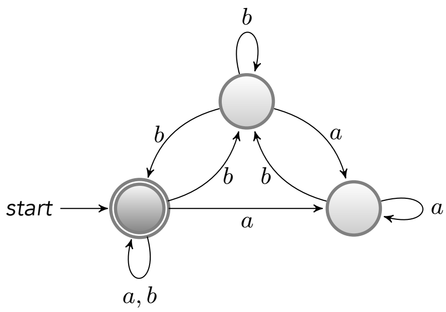
Soluzione: *Il linguaggio non è regolare. Per dimostrarlo, utilizziamo il pumping lemma nel modo seguente. Fissato* $n > 0$, *consideriamo la stringa* $\sigma = a^n b^{n+1}$. *Qualsiasi decomposizione* $\sigma = uvw$ *con* $|uv| \leq n$ *e* $|v| \geq 1$ *avrà necessariamente* $uv = a^r$ *e* $w = a^{n-r}b^{n+1}$ *con* $r \leq n$, *e quindi* $v = a^s$, $u = a^{r-s}$ *per un qualche valore* $0 < s \leq r$. *Scegliendo ad esempio* $i = 2$ *abbiamo allora che* $uv^2w = a^{r-s}v^sv^su^{n-r}b^{n+1} = a^{n+s}b^{n+1} \notin L$.

Quesito 3 (7 punti): Si consideri l'espressione regolare $r = a(bb^* + a)^*ab$. Derivare un ASFD che riconosce $L(r)$.

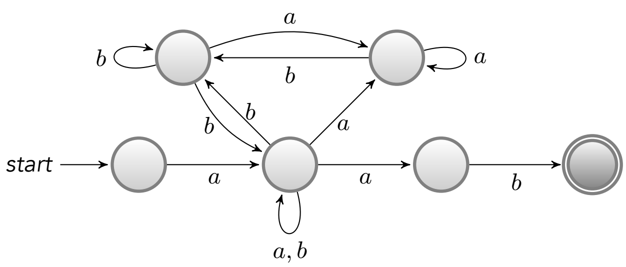
Soluzione: *Deriviamo da* r *un ASFND con* ε*-transizioni che riconosca* $L(r)$. *Possiamo osservare che la sotto-espressione regolare* $(bb^* + a)^*$ *è accettata per costruzione dall'ASFND con* ε*-transizioni*



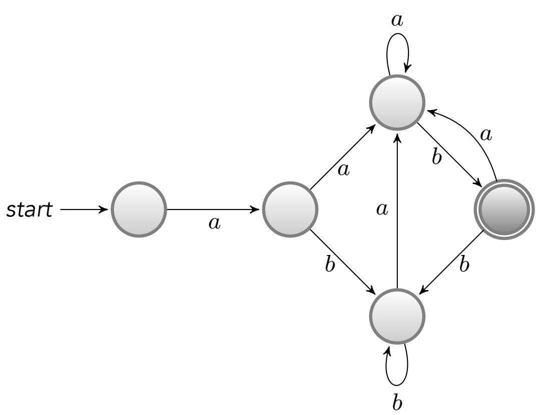
Eliminando le ε*-transizioni, si ottiene l'ASFND*



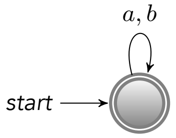
Da cui immediatamente l'ASFND per $L(r)$



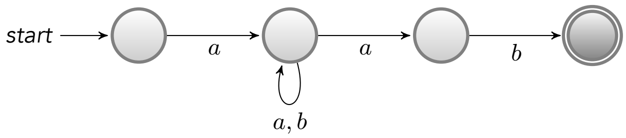
e da questo l'ASFD



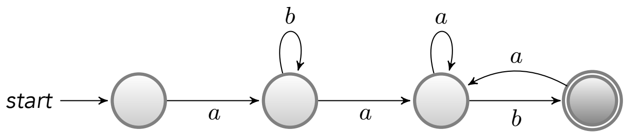
In alternativa, si potrebbe osservare che $(bb^* + a)^*$ comprende tutte le stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$, che sono riconosciute da



Da cui l'ASFND per $L(r)$



e da questo l'ASFD



Quesito 4 (6 punti): Definire una grammatica CF che generi il linguaggio $L = \{w \in \{a, b\} | w \text{ contiene almeno } 4b\}$

Soluzione: *Osserviamo che possiamo risolvere il problema derivando una grammatica regolare che generi L. A tal fine, definiamo un ASFD che riconosca L.*

	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_2	q_3
q_3	q_3	q_4
q_4	q_4	q_4

con $F = \{q_4\}$.

La grammatica deriva immediatamente come

$$
\begin{array}{lcl}
A_0 & \to & aA_0 \mid bA_1 \\
A_1 & \to & aA_1 \mid bA_2 \\
A_2 & \to & aA_2 \mid bA_3 \\
A_3 & \to & aA_3 \mid bA_4 \mid b \\
A_4 & \to & aA_4 \mid bA_4 \mid a \mid b
\end{array}
$$

Quesito 5 (6 punti): Ridurre la grammatica seguente in GNF

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & aEb \mid aaC \mid AA \\
A & \to & BC \mid bS \mid b \\
B & \to & aB \mid \varepsilon \\
C & \to & Ca \mid Cb \\
D & \to & a \mid c
\end{array}
$$

Soluzione: *Per portare la grammatica in forma ridotta eliminiamo l'ε-produzione, ottenendo*

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & aEb \mid aaC \mid AA \\
A & \rightarrow & BC \mid C \mid bS \mid b \\
B & \rightarrow & aB \mid a \\
C & \rightarrow & Ca \mid Cb \\
D & \rightarrow & a \mid c
\end{array}
$$

Eliminiamo quindi la produzione unitaria

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & aEb \mid aaC \mid AA \\
A & \rightarrow & BC \mid Ca \mid Cb \mid bS \mid b \\
B & \rightarrow & aB \mid a \\
C & \rightarrow & Ca \mid Cb \\
D & \rightarrow & a \mid c
\end{array}
$$

Osserviamo ora che C e E sono simboli non fecondi, per cui eliminandoli otteniamo

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & AA \\
A & \rightarrow & bS \mid b \\
B & \rightarrow & aB \mid a \\
D & \rightarrow & a \mid c
\end{array}
$$

a questo punto, eliminando i simboli non raggiungibili B e D, otteniamo la grammatica equivalente in forma ridotta

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & AA \\
A & \rightarrow & bS \mid b
\end{array}
$$

La corrispondente grammatica in CNF è

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & AA \\
A & \rightarrow & BS \mid b \\
B & \rightarrow & b
\end{array}
$$

e da questa la grammatica in GNF

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & bSA \mid bA \\
A & \rightarrow & bS \mid b \\
B & \rightarrow & b
\end{array}
$$