Fondamenti dell'Informatica	1 semestre

Prova scritta di esame del 9-7-2018

Prof. Giorgio Gambosi — *a.a. 2017-2018*

Ad ogni quesito proposto è associato il numero di punti ottenuti in caso di risposta corretta ed esaustiva. Risposte parziali possono portare all'attribuzione di una frazione di tale punteggio. Spiegare in modo chiaro ed esauriente i passaggi effettuati.

Il punteggio finale della prova risulta come somma dei punteggi acquisiti per i vari quesiti.

Quesito 1 (8 punti): Si definisca un automa a pila (eventualmente non deterministico) che accetti il linguaggio $L = \{a^r b^s c^t | t = r + s\}$.

Soluzione: *L'automa può essere derivato portando dapprima la grammatica precedente in forma normale di Greibach, applicando poi la costruzione standard di un NPDA che riconosca lo stesso linguaggio. La presenza di ε in L può essere non considerata nella costruzione dell'automa, introducendo poi la possibilità per l'automa stesso di riconoscere la stringa vuota.*

Il linguaggio L è generato dalla grammatica

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & aSc|bUc|\varepsilon \\ U & \rightarrow & bUc|\varepsilon \end{array}$$

Eliminando le ε-transizioni, e non considerando la produzione $S \rightarrow \varepsilon$, di cui terremo conto nella definizione dell'automa, otteniamo

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & aSc|bUc|bc|ac \\ U & \rightarrow & bUc|bc \end{array}$$

che risulta in forma ridotta. Portandola in CNF si ottiene

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & XC|YC|BC|AC \\ U & \rightarrow & YC|BC \\ X & \rightarrow & AS \\ Y & \rightarrow & BU \\ A & \rightarrow & a \\ B & \rightarrow & b \\ C & \rightarrow & c \end{array}$$

da cui deriva immediatamente la grammatica equivalente in GNF

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & aSC|bUC|bC|aC \\ U & \rightarrow & bUC|bC \\ X & \rightarrow & aS \\ Y & \rightarrow & bU \\ A & \rightarrow & a \\ B & \rightarrow & b \\ C & \rightarrow & c \end{array}$$

L'automa a pila che accetta il linguaggio $L - \{\varepsilon\}$ per pila vuota deriva semplicemente per costruzione ponendo $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{S, U'X'Y'A'B'C\}$, $Z_0 = S$, $Q = \{q_0\}$, $q_F = \emptyset$ e in cui la funzione di transizione è tale che $(q_0, X) \in \delta_N(q_0, a, A)$ se e solo se $A \to aX \in P$. Ne deriva che

$$\begin{aligned}
\delta_N(q_0, a, S) &= \{(q_0, SC), (q_0, C)\} \\
\delta_N(q_0, b, S) &= \{(q_0, UC), (q_0, C)\} \\
\delta_N(q_0, a, X) &= \{(q_0, S)\} \\
\delta_N(q_0, b, Y) &= \{(q_0, U)\} \\
\delta_N(q_0, a, A) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \\
\delta_N(q_0, b, B) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \\
\delta_N(q_0, c, C) &= \{(q_0, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

Per accettare il linguaggio L, e quindi anche la stringa vuota, è sufficiente considerare un ulteriore simbolo iniziale di pila $Z \in \Gamma$ con $Z_0 = Z$ ed aggiungere a δ_N le transizioni $\delta_N(q_0, \varepsilon, Z) = \{(q_0, \varepsilon), (q_0, S)\}$.

Quesito 2 (8 punti): Si definisca una grammatica in Forma Normale di Chomsky che generi il linguaggio su $\Sigma = \{0, 1, 2\}$

$$L = \{w = 0^r 1^s 2^t | t = |r - s|\}$$

Soluzione: *Il linguaggio L è l'unione dei due linguaggi $L_1 = \{w = 0^r 1^s 2^t | t = r - s\}$ e $L_2 = \{w = 0^r 1^s 2^t | t = s - r\}$.*

Una grammatica che generi $L_1 = \{w = 0^r 1^s 2^t | r = s + t\}$ è data da

$$\begin{aligned}
U &\to 0U2|X|\varepsilon \\
X &\to 0X1|\varepsilon
\end{aligned}$$

Una grammatica che generi $L_2 = \{w = 0^r 1^s 2^t | s = r + t\}$ è data da

$$\begin{aligned}
V &\to YZ \\
Y &\to 0Y1|\varepsilon \\
Z &\to 1Z2|\varepsilon
\end{aligned}$$

Una grammatica che genera L risulta allora per composizione delle precedenti come:

$$\begin{aligned}
S &\to U|V \\
U &\to 0U2|X|\varepsilon \\
X &\to 0X1|\varepsilon \\
V &\to YZ \\
Y &\to 0Y1|\varepsilon \\
Z &\to 1Z2|\varepsilon
\end{aligned}$$

Eliminando le ε-produzioni otteniamo:

$$\begin{aligned}
S &\to U|V|\varepsilon \\
U &\to 0U2|X|02 \\
X &\to 0X1|01 \\
V &\to YZ|Y|Z \\
Y &\to 0Y1|01 \\
Z &\to 1Z2|12
\end{aligned}$$

Ignorando la produzione $S \to \varepsilon$, che sarà reintrodotta alla fine, ed eliminando le produzioni unitarie,

$$\begin{array}{lcl} S & \to & 0U2|0X1|01|02|YZ|0Y1|01|1Z2|12 \\ U & \to & 0U2|0X1|01|02 \\ X & \to & 0X1|01 \\ V & \to & YZ|0Y1|01|1Z2|12 \\ Y & \to & 0Y1|01 \\ Z & \to & 1Z2|12 \end{array}$$

e in CNF (riaggiungendo la produzione $S \to \varepsilon$)

$$\begin{array}{lcl} S & \to & AP|AQ|AB|AC|YZ|AR|AB|BT|BC|\varepsilon \\ U & \to & AP|AQ|AB|AC \\ X & \to & AQ|AB \\ V & \to & YZ|AR|AB|BT|BC \\ Y & \to & AR|AB \\ Z & \to & BT|BC \\ P & \to & UC \\ Q & \to & XB \\ R & \to & YB \\ T & \to & ZC \\ A & \to & 0 \\ B & \to & 1 \\ C & \to & 2 \end{array}$$

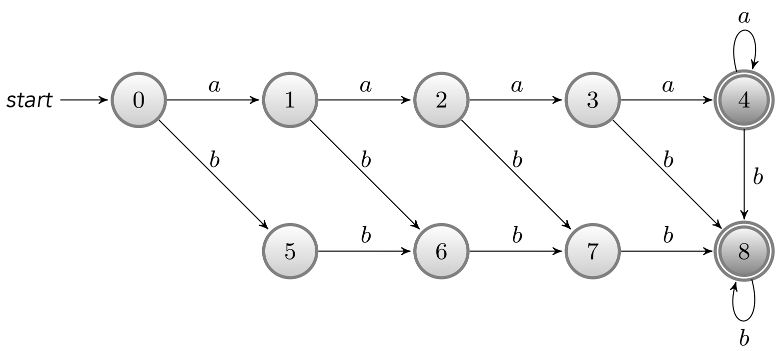
Quesito 3 (6 punti): Sia $\mathcal{G}$ una grammatica in CNF (Forma Normale di Chomsky). Mostrare che per ogni stringa $w \in L(\mathcal{G})$ tutte le derivazioni di w in $\mathcal{G}$ hanno la stessa lunghezza. Derivare inoltre la relazione tra la lunghezza di una derivazione e $\mid w \mid$.

Soluzione: *In una grammatica in CNF le produzioni sono del tipo $A \to BC$ o $A \to a$. Se consideriamo una stringa w di lunghezza $n = |w|$ generate dalla grammatica ossrviamo che ogni derivazione inizia da una forma di frase di lunghezza 1 (l'assioma) e comprende una sequenza di passi di cui quelli corrispondenti a produzioni $A \to BC$ incrementano di 1 la lunghezza della forma di frase e quelli di tipo $A \to a$ trasformano un non terminale della forma di frase in un terminale. Di conseguenza, per ottenere una stringa di lunghezza n sono necessarie $n-1$ applicazioni di produzioni del primo tipo, mentre per ottenere gli n terminali della stringa sono necessarie n applicazioni di produzioni del secondo tipo. Ne deriva che la lunghezza della derivazione è esattamente $2n-1$.*

Quesito 4 (7 punti): Si considerino i linguaggi $L_1 = \{w = a^n b^m | n + m > 3\}$ e $L_2 = \{w = a^n b^m | n - m > 3\}$. Si collochino i due linguaggi all'interno della gerarchia di Chomsky.

Soluzione:

L_1 *è regolare, in quanto riconosciuto dal seguente ASFD*



Per quanto riguarda L_2, questo linguaggio è context free, in quanto generato dalla grammatica

$$\begin{array}{rcl} S & \to & XY \\ X & \to & aX|aaa \\ Y & \to & aYb|\varepsilon \end{array}$$

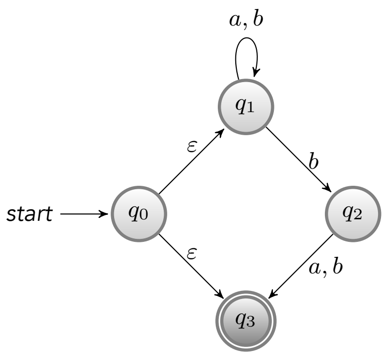
Il linguaggio è inoltre strettamente context free, quindi non regolare, come mostrato applicando il pumping lemma per i linguaggi regolari e considerando ad esempio la stringa $\sigma = a^{n+3}b^n \in L_2$. Una qualunque decomposizione $\sigma = uvw$ con $|uv| < n$ e $|v| \geq 1$ avrà necessariamente che $v = a^h$ per qualche $h \geq 1$. Di conseguenza la stringa $\sigma' = uw = a^{n+3-h}b^n$ non appartiene a L_2, mostrando la non regolarità del linguaggio.

Quesito 5 (4 punti): Sia dato l'ASFND $\mathcal{A}$ con $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $F = \{q_3\}$, δ_N definita come

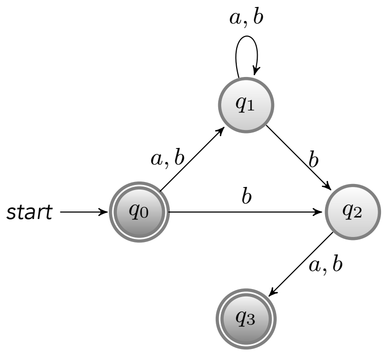
	a	b	ε
q_0			$\{q_1, q_3\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	
q_3			

Derivare un ASFD con funzione di transizione totale equivalente a $\mathcal{A}$.

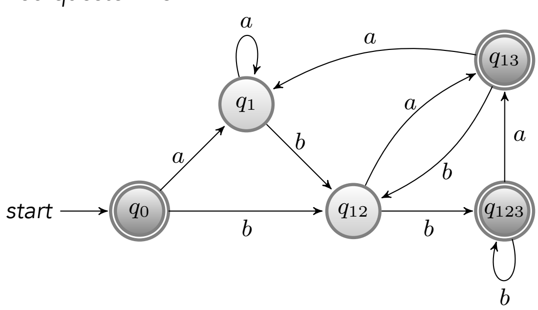
Soluzione: *Riportiamo il grafo di transizione dell'automa ε-ASFND dato:*



Eliminando le ε-transizioni otteniamo l'ASFND



E da questo l'ASFD



La funzione di transizione risulta completa.