Fondamenti dell'Informatica	1 semestre

Prova scritta di esame del 21-2-2018

Prof. Giorgio Gambosi — *a.a. 2017-2018*

Ad ogni quesito proposto è associato il numero di punti ottenuti in caso di risposta corretta ed esaustiva. Risposte parziali possono portare all'attribuzione di una frazione di tale punteggio. Spiegare in modo chiaro ed esauriente i passaggi effettuati.

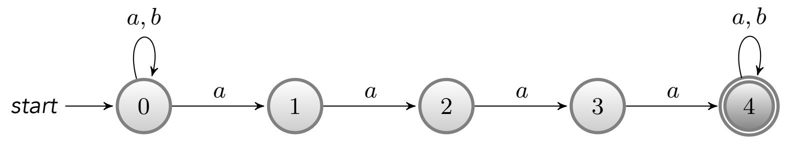
Il punteggio finale della prova risulta come somma dei punteggi acquisiti per i vari quesiti.

Quesito 1 (8 punti): Sia dato il linguaggio $L = \{\sigma \in \{a, b, c\}^* \mid \#a(\sigma) = \#b(\sigma) = \#c(\sigma)\}$, dove $\#x(\sigma)$ indica il numero di occorrenze del carattere x nella stringa σ. Il linguaggio L è context free? Dimostrare la risposta data.

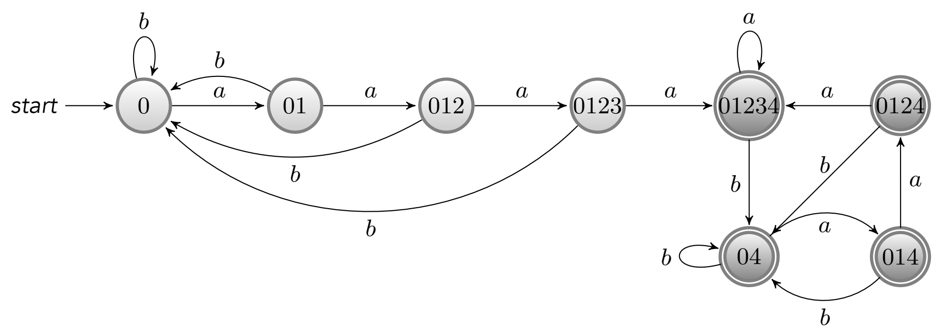
Soluzione: *Il linguaggio non è context free. Per dimostrarlo, utilizziamo il pumping lemma nel modo seguente. Fissato $n > 0$, consideriamo la stringa $\sigma = a^n b^n c^n$. Qualsiasi decomposizione $\sigma = uvwxy$ con $|vwx| \leq n$ e $|vx| \geq 1$ avrà necessariamente che o che vwx è una stringa con tutti simboli uguali (tutti a, tutti b o tutti c), o che vwx è una stringa comprendente due soli tipi di caratteri (del tipo $a^p b^q$ o $b^r c^s$). In entrambi i casi c'è almeno un carattere dell'alfabeto $\{a, b, b\}$ che non compare in vwx , e quindi in v e x. Ne deriva che, considerando la stringa uv^2wx^2y il numero di occorrenze aumentano per almeno uno e al più due caratteri dell'alfabeto, per cui uv^2wx^2y non presenta lo stesso numero di occorrenze di a, b, c.*

Quesito 2 (6 punti): Definire un ASFD minimo che riconosca il linguaggio $L \subset \{a, b\}^*$ comprendente tutte le stringhe che non contengono sequenze di più di tre a al loro interno.

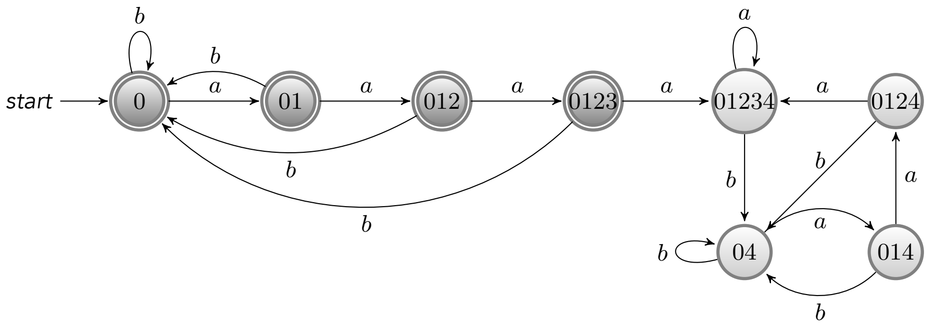
Soluzione: *Definiamo un ASFND che accetta $\overline{L}$.*



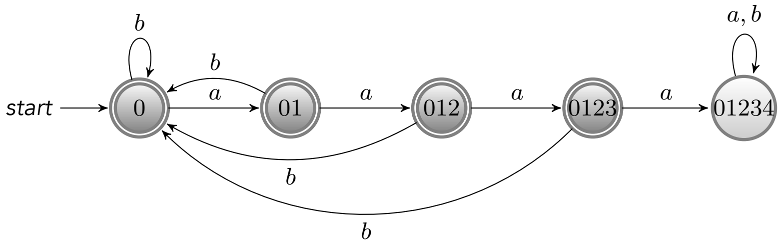
e da questo un ASFD che riconosce lo stesso linguaggio



L'ASFD che riconosce L deriva immediatamente



La minimizzazione dell'automa ci fornisce le classi di equivalenza $\{0\}, \{01\}, \{012\}, \{0123\}, \{04, 014, 0124, 01234\}$, *da cui deriva l'automa minimo*



Quesito 3 (5 punti): Si definisca una grammatica context free che generi il linguaggio $L = \{a^r b^s c^t a^n c^n | s = r + t, r, t, n \geq 0\}$.

Soluzione: *Una possibile soluzione è la grammatica*

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & ABC \\
A & \to & aAb \mid \varepsilon \\
B & \to & bBc \mid \varepsilon \\
C & \to & aCc \mid \varepsilon
\end{array}
$$

Quesito 4 (7 punti): Si definisca un automa a pila (eventualmente non deterministico) che accetti il linguaggio $L = \{a^r b^s c^t a^n c^n | s = r + t, r, t, n \geq 0\}$.

Soluzione: *L'automa si può derivare dalla grammatica dell'esercizio precedente, portandola prima in forma ridotta*

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & ABC \mid BC \mid AB \mid AC \mid \varepsilon \\
A & \to & aAb \mid ab \\
B & \to & bBc \mid bc \\
C & \to & aCc \mid ac
\end{array}
$$

quindi in CNF

$$
\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & TC \mid BC \mid AB \mid AC \mid \varepsilon \\
A & \rightarrow & UY \mid XY \\
B & \rightarrow & VZ \mid YZ \\
C & \rightarrow & WZ \mid XZ \\
T & \rightarrow & AB \\
U & \rightarrow & XA \\
V & \rightarrow & YB \\
W & \rightarrow & XC \\
X & \rightarrow & a \\
Y & \rightarrow & b \\
Z & \rightarrow & c
\end{array}
$$

e in GNF (i non terminali T, U, V, W risultano inutili nella grammatica in GNF in quanto non raggiungibili)

$$
\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & aAYBC \mid aYBC \mid bBZC \mid bZC \mid aAYB \mid aYB \mid aAYC \mid aYC \mid \varepsilon \\
A & \rightarrow & aAY \mid aY \\
B & \rightarrow & bBZ \mid bZ \\
X & \rightarrow & a \\
Y & \rightarrow & b \\
Z & \rightarrow & c
\end{array}
$$

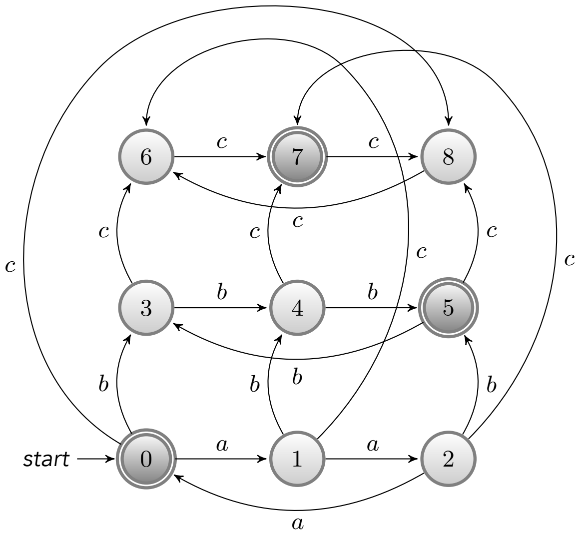
La funzione dei transizione del PDA non deterministico risulta allora:

$$
\begin{array}{l}
\delta(q_0, \varepsilon, S)\{(q_0, \varepsilon)\} \\
\delta(q_0, a, S) = \{(q_0, AYBC), (q_0, YBC), (q_0, AYB), (q_0, YB), (q_0, AYC), (q_0, YC)\} \\
\delta(q_0, b, S) = \{(q_0, BZC), (q_0, ZC)\} \\
\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AY), (q_0, Y)\} \\
\delta(q_0, b, B) = \{(q_0, BZ), (q_0, Z)\} \\
\delta(q_0, a, C) = \{(q_0, CZ), (q_0, Z)\} \\
\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, \varepsilon)\} \\
\delta(q_0, b, Y) = \{(q_0, \varepsilon)\} \\
\delta(q_0, c, Z) = \{(q_0, \varepsilon)\}
\end{array}
$$

Quesito 5 (7 punti): Si definisca una grammatica di tipo 3 che generi il seguente linguaggio

$$L = \{a^n b^m c^k | n + m + k \text{ divisibile per } 3\}$$

Soluzione: *Definiamo un ASFD che riconosce il linguaggio*



da cui deriva immediatamente la grammatica di tipo 3

$$
\begin{array}{lcl}
A_0 & \to & aA_1 \mid bA_3 \mid cA_8 \\
A_1 & \to & aA_2 \mid bA_4 \mid cA_6 \\
A_2 & \to & aA_0 \mid bA_5 \mid cA_7 \mid a \\
A_3 & \to & bA_4 \mid cA_6 \\
A_4 & \to & bA_5 \mid cA_7 \mid b \mid c \\
A_5 & \to & bA_3 \mid cA_8 \\
A_6 & \to & cA_7 \mid c \\
A_7 & \to & cA_8 \\
A_8 & \to & cA_6
\end{array}
$$