ESAME DI RICERCA OPERATIVA

1. Risolvere il seguente problema con il Primale-duale partendo dalla soluzione duale ammissibile (0,-1).

$\min -2x_1 + x_2 + 2x_3$

$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$

$-2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1$

$x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

2. La soluzione ottima del seguente problema può ammettere componenti x_1 e x_2 contemporaneamente in base?

$\min 2x_1 + x_2 + 6x_3$

$3x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 2$

$2x_2 + 4x_3 \geq 4$

$x_2 + 5x_3 \leq 5$

$x_1 \geq 0\ x_2, x_3 \leq 0$

3. Usale l'algoritmo Simplesso duale per risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$\min 3x_1 + 2x_2 + 2x_3$

$-3x_1 + x_2 \leq 2$

$2x_2 - 5x_3 \geq 1$

$x_2 - 3x_3 \geq 4$

$x_1, x_2, x_3, \geq 0$

ESERCIZIO 1

①

$\min \; -2x_1 + x_2 + 2x_3$

$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$

$-2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1$

$x_1 \leq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$

FORMA STANDARD

$\min \; +2x_1 + x_2 + 2x_3$

$-2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4$

$+2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = 1$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$

DUALE

$\max \; 4y_1 + y_2$

$-2y_1 + \cancel{2}y_2 \leq 2$

$y_1 + y_2 \leq 1$

$y_1 - 2y_2 \leq \cancel{1}$

$-y_1 \leq 0$

$y_2 \leq 0$

$y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

CONTROLLO VINCOLI SATURI

$-2 < 2 \qquad Sol_1 = 4 \rightarrow x_1 = 0$

$-1 < 1 \qquad Sol_2 = 2 \rightarrow x_2 = 0$

$2 = 2 \qquad Sol_3 = 0$

$0 = 0 \qquad Sol_4 = 0$

$-1 < 0 \qquad Sol_5 = 1 \rightarrow x_5 = 0$

P.R.

min $s_1 + s_2$

$x_3 - x_4 + s_1 = 4$

$-2x_3 + s_2 = 1$

$x_3, x_4, s_1, s_2 \geq 0$

RISOLVO IL P.R.

		x_3	x_4	s_1	s_2
		0	0	1	1
s_1	4	1	-1	1	0
s_2	1	-2	0	0	1

$\rightarrow$

	-5	1	1	0	0
s_1	4	1	-1	1	0
s_2	1	-2	0	0	1

SOL. OTTIMA P.R. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. VADO AVANTI PERCHE $z^* = 5 \neq 0$

D.R.

max $4\pi_1 + \pi_2$

$x_3)$ $\pi_1 - 2\pi_2 \leq 0$

$x_4)$ $-\pi_1 \leq 0$

$s_1)$ $\pi_1 \leq 1$

$s_2)$ $\pi_2 \leq 1$

PER COMPLEMENTARIETÀ POICHÈ $s_1^* = 1$ E $s_2^* = 1$ DEVE ESSERE

$\pi_1^* = 1$

$\pi_2^* = 1$

CALCOLO θ (3)

$$A^T \pi^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

CONSIDERO SOLO LA SECONDA E LA QUINTA COMPONENTE E QUINDI $\theta = \min \left\{ \frac{2}{2}, \frac{1}{1} \right\} = 1$

$$y^{(1)} = y^{(0)} + \theta \pi^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

II^a ITERAZIONE

VERIFICO VINCOLI SATURI.

$-2 < 2 \quad Sd_1 = 4 \rightarrow x_1 = 0$

$1 = 1 \quad Sd_2 = 0$

$1 < 2 \quad Sd_3 = 1 \rightarrow x_3 = 0$

$-1 < 0 \quad Sd_4 = 1 \rightarrow x_4 = 0$

$0 = 0 \quad Sd_5 = 0$

P. R.

min S_1

$$\begin{aligned} x_2 + S_1 &= 4 \\ x_2 + x_5 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & x_2 & x_5 & S_1 \\ & 0 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \to \begin{array}{c|ccc} & x_2 & x_5 & S_1 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & x_2 & x_5 & S_1 \\ & -3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline S_1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

CI FERMIAMO ANCHE SE IL PTO NON È DI OTTIMO

$\tau^* = 3$

D.R.

max $4\pi_1 + \pi_2$

$x_2)$ $\pi_1 + \pi_2 \le 0$

$S_1)$ $\pi_1 \le 1$

$x_5)$ $\pi_2 \le 0$

PER COMPLEMENTARITÀ ABBIAMO CHE

$S_1^* = 3 \to \pi_1^* = 1$

$x_2^* = 1 \to \pi_2^* = -1$

CALCOLO θ

$$A^T \pi^* = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

CONSIDERO SOLO LA 3ª COMPONENTE

$$\theta = \frac{1}{3}$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \theta \cdot \pi^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

STOP

ESERCIZIO

SE ALL'OTTIMO x_1 E x_2 SONO IN BASE OVVERO

$x_1^* > 0$ E $x_2^* > 0$ ALLORA

$$3y_1^* = 2 \rightarrow \boxed{y_1^* = \frac{2}{3}}$$

$$5y_1^* + 2y_2^* + y_1^* = 1$$

INOLTRE

$$\boxed{y_1 \leq 0}\,,$$

E QUINDI C'E' UN ASSURDO

ESERCIZIO 3

$$\min \; 3x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

$$-3x_1 + x_2 \leq 2$$

$$2x_2 - 5x_3 \geq 1$$

$$x_2 - 3x_3 \geq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

IL P.L. È IN FORMA CANONICA DUALE

$$\min \; 3x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

$$-3x_1 + x_2 + s_1 = 2$$

$$-2x_2 + 5x_3 + s_2 = -1$$

$$-x_2 + 3x_3 + s_3 = -4$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

⑥

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
		3	2	2	0	0	0
s_1	2	-3	1	0	1	0	0
s_2	-1	0	-2	5	0	1	0
→ s_3	-4	0	-1	3	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
	-8	3	0	8	0	0	2
→ s_1	-2	-3	0	3	1	0	1
s_2	7	0	0	-1	0	1	-1
x_2	4	0	1	-3	0	0	-1

	-10	0	0	11	1	0	3
x_1	$\frac{2}{3}$	1	0	-1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
s_2	7	0	0	-1	0	1	-1
x_2	4	0	1	-3	0	0	-1

$z^* = 10$

$x^* = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$