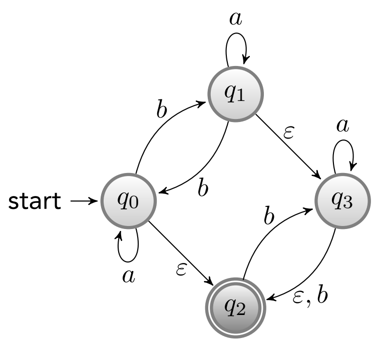
1 Automi a stati finiti con ε-transizioni

Una ε-transizione di un ASF (deterministico o non deterministico) è una transizione del tipo $\delta(q, \varepsilon) = q'$, per effetto della quale l'automa può passare, senza leggere alcun carattere in input, da uno stato attuale q ad uno stato successivo q'. Si sottolinea che la ε-transizione non necessariamente deve aver luogo: l'automa può rimanere nello stato q o passare, senza alcun input, nello stato q'.

Denominiamo cone ε-ASF un automa a stati finiti (deterministico o non deterministico) che presenta ε-transizioni. La definizione formale di un automa di tale tipo deriva immediatamente da quella di ASF considerando l'alfabeto Σ esteso con il carattere ε, per cui si ha che $\mathcal{A} =< \Sigma \cup \{\varepsilon\}, Q, \delta, q_0, F >$, con $\delta : \Sigma \cup \{\varepsilon\} \times Q \mapsto Q$ nel caso deterministico e $\delta : \Sigma \cup \{\varepsilon\} \times Q \mapsto 2^Q$ nel caso non deterministico.

Di seguito è riportato un esempio di ε-ASF:



Si può immediatamente osservare che l'introduzione di ε transizione in un ASFD rende l'automa risultante non deterministico (e in effetti la singola ε-transizione, potendo aver luogo o meno, è inerentemente non deterministica). La presenza di una transizione $\delta(q, \varepsilon) = q'$ rende lo stato q' attuale tutte le volte in cui è attuale q, in quanto l'automa può passare da q a q' (e quindi far diventare q' il nuovo stato attuale) tutte le volte in cui si trova in q.

Da ciò deriva che, in presenza di un carattere letto $a \in \Sigma$, lo stato successivo possa essere sia $\delta(q, a)$ che $\delta(q', a)$.

Nell'esempio in figura, abbiamo che, se lo stato attuale è q_1, la lettura di un carattere a può far rimanere l'automa nello stato q_1, in quanto $\delta(q_1, a) = q_1$, ma può anche portare l'automa nello stato q_3, in quanto $\overline{\delta}(q_1, \varepsilon a) = \delta(\delta(q_1, \varepsilon), a) = \delta(q_3, a) = q_3$.

Allo stesso modo, la lettura del carattere b può portare l'automa dallo stato q_1 allo stato q_0, in quanto $\delta(q_1, b) = q_0$, ma anche allo stato q_2 (in quanto $\overline{\delta}(q_1, \varepsilon b) = q_2$) o allo stato q_3 (in quanto $\overline{\delta}(q_1, \varepsilon\varepsilon b) = q_3$).

Indichiamo con il termine ε-chiusura l'operazione che associa ad ogni stato q dell'automa l'insieme $\varepsilon(q)$ degli stati raggiungibili da q mediante una sequenza (anche nulla) di ε-transizioni.

Con riferimento all'automa in figura, avremo che:

q	$\varepsilon(q)$
q_0	$\{q_0, q_2\}$
q_1	$\{q_1, q_2, q_3\}$
q_2	$\{q_2\}$
q_3	$\{q_2, q_3\}$

Definiamo ora la funzione di transizione estesa $\hat{\delta}$, in modo da tener conto delle ε-transizioni, nel modo seguente:

1. $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \varepsilon(q)$

2. Per ogni $x \in \Sigma^*$ e per ogni $a \in \Sigma$, $\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{p \in P} \varepsilon(p)$, dove $P = \{p | \exists r \in \hat{\delta}(q, x)$ tale che $p \in \delta(r, a)\}$; vale a dire l'unione delle ε-chiusure di tutti gli stati raggiungibili da un qualche stato in $\hat{\delta}(q, x)$, avendo in input il carattere a.

Per comodità di notazione, dato un insieme di stati $P \subseteq Q$, indichiamo con $\varepsilon(P)$ l'unione delle ε-chiusure di tutti gli stati in P: $\varepsilon(P) = \bigcup_{p \in P} \varepsilon(p)$.

Considerando l'automa in figura, abbiamo ad esempio che $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \varepsilon(q_0) = \{q_0, q_2\}$, e quindi $\hat{\delta}(q_0, a) = \varepsilon(P)$, dove $P = \delta(q_0, a) \cup \delta(q_2, a) = \{q_0\}$, per cui $\hat{\delta}(q_0, a) = \varepsilon(q_0) = \{q_0, q_2\}$.

Allo stesso modo, osserviamo che $\hat{\delta}(q_0, ab) = \varepsilon(P)$, con $P = \delta(q_0, b) \cup \delta(q_2, b) = \{q_1, q_3\}$, per cui $\hat{\delta}(q_0, ab) = \varepsilon(q_1) \cup \varepsilon(q_3) = \{q_1, q_2, q_3\}$.

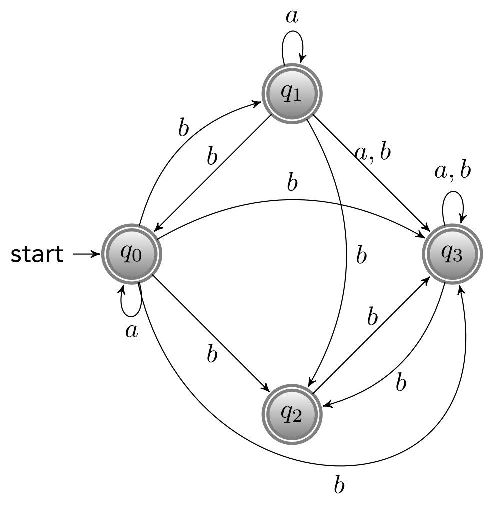
Si può osservare che un ε-ASFD $\mathcal{A} =< \Sigma \cup \{\varepsilon\}, Q, \delta, q_0, F >$può essere trasformato in un ASFND $\mathcal{A}_N =< \Sigma, Q, \delta_N, q'_0, F' >$ equivalente nel modo seguente:

1. per ogni $q \in Q$ e per ogni $a \in \Sigma$, $\delta_N(q, a) = \hat{\delta}(q, a)$

2. $q'_0 = q_0$

3. $F' = \{q \in Q | \varepsilon(q) \cap F \neq \emptyset\}$

L'applicazione della procedura all'automa in figura produce l'ASFND seguente.



Si noti che le considerazioni precedenti possono essere effettuate considerando l'introduzione di ε-transizioni su un automa a stati finiti non deterministico, mostrando come sia possibile, con la procedura precedente, derivare anche in questo caso un ASFND equivalente.

La dimostrazione dell'equivalenza può essere basata sulla verifica che, per ogni stringa in input, l'insieme dei possibili stati raggiunti da entrambi gli automi è il medesimo. I particolari della dimostrazione sono lasciati per esercizio.