Capitolo 1

Programmazione lineare

ESERCIZIO 1.1. Porre in forma canonica i seguenti programmi lineari.

$$\min\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 - x_3 && \geq 5 \\ & 2x_1 + 4x_3 && = 12 \\ & x_1 + x_2 + x_3 && \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0,\ x_3 \text{ libera.} \end{aligned} \tag{a}$$

$$\max\ 4x_1 - x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 - x_3 && = 8 \\ & 3x_1 + x_3 && \leq 7 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \text{ libera},\ x_3 \leq 0. \end{aligned} \tag{b}$$

$$\min\ 8x_1 - x_2 + x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 + x_3 && \geq 4 \\ & x_2 - x_3 && \leq 7 \\ & x_1 - x_2 && \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0. \end{aligned} \tag{c}$$

$$\max\ 4x_1 - x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 && \leq 2 \\ & 2x_1 + 7x_2 && = 8 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0. \end{aligned} \tag{d}$$

$$\min 4x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 && \geq 4 \\ &x_2 + x_3 && \leq 7 \\ &x_3 - x_4 && \leq 2 \\ &x_1 - x_4 && = 12 \end{aligned} \qquad (e)$$

$x_1, x_2.x_3 \geq 0$, x_4 libera.

$$\max \; 2x_1 + 4x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 && \leq 12 \\ &x_1 - x_2 && \geq 2 \\ &x_2 + x_3 && \leq 4 \end{aligned} \qquad (f)$$

$x_1 \geq 0$, x_2 libera, $x_3 \leq 0$.

ESERCIZIO 1.2. Porre in forma standard i programmi lineari dell'esercizio 1.1.

ESERCIZIO 1.3. Risolvere i seguenti programmi lineari utilizzando il metodo del simplesso.

$$\max \; 3x_1 + 2x_2 - 5x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &4x_1 - 2x_2 + 2x_3 && \leq 4 \\ &2x_1 + x_2 + x_3 && \leq 1 \end{aligned} \qquad (a)$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

$$\max \; x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &x_1 - 2x_2 + x_3 && \leq 2 \\ &3x_1 - x_2 - 2x_3 && \leq 6 \end{aligned} \qquad (b)$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$$\max \; 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 && \leq 2 \\ &2x_1 + 3x_2 + 8x_3 && \leq 12 \end{aligned} \qquad (c)$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

$$\min \; 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 && \leq 8 \\ & -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 && \leq 4 \\ & x_1 + x_3 && \leq 10 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0. \end{aligned} \tag{d}$$

$$\max\ x_1 + 3x_2 - x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 && \leq 3 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 && \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 && \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{e}$$

$$\max\ 4x_1 + x_2 + 5x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & -x_1 + x_2 && \leq 1 \\ & 2x_2 - x_3 && \leq 2 \\ & x_1 + x_3 && \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{f}$$

ESERCIZIO 1.4. Risolvere i seguenti programmi lineari utilizzando il metodo del simplesso.

$$\min\ 6x_1 + x_2 + 3x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & 10x_1 - 2x_2 + 5x_3 && \geq 15 \\ & x_1 - x_2 + 3x_3 && \geq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{a}$$

$$\min\ 7x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & 4x_1 + 3x_2 + 2x_4 && \geq 2 \\ & -5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 && \leq 1 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0. \end{aligned} \tag{b}$$

$$\min\ 2x_1 + x_2 + 4x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + 2x_3 && = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 && = 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{c}$$

$$\max\ x_1 + x_2 + x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 && = 5 \\ & 4x_2 + x_3 + 2x_4 && = 2 \\ & 3x_2 - 2x_4 && \leq 6 \\ & x_1, \ldots, x_4 \geq 0. \end{aligned} \tag{d}$$

$$\max\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 && \geq 2 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 && \leq -3 \\ & x_1, \ldots, x_4 \geq 0. \end{aligned} \tag{e}$$

$$\min\ x_1 + x_2 - 2x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 + x_3 && = 2 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 && = 5 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 && = 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{f}$$

ESERCIZIO 1.5. Per i programmi lineari dell'esercizio 1.3, dire se le basi finali risultano ottime cambiando l'obiettivo come segue.

(a)	$\max\ 7x_1 + x_2$	(d)	$\min\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4$
(b)	$\min\ 4x_1 + 5x_2 - x_3$	(e)	$\max\ 5x_1 + 3x_2$
(c)	$\min\ x_1 + x_2 + x_3$	(f)	$\min\ x_1 + 2x_2 - x_3$

ESERCIZIO 1.6. Per ognuno dei programmi lineari dell'esercizio 1.3, identificare la matrice A_B^{-1}.

ESERCIZIO 1.7. Risolvere i seguenti programmi lineari utilizzando il metodo grafico. Confrontare i risultati con quelli forniti dal simplesso.

$$\max\ x_1 + x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 &&\geq 4 \\ &x_1 + 4x_2 &&\leq 10 \\ &x_2 &&\geq 1 \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \qquad (a)$$

$$\min\ 2x_1 + x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &x_1 + 4x_2 &&\geq 8 \\ &x_1 &&\geq 2 \\ &-2x_1 + x_2 &&\leq 4 \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \qquad (b)$$

$$\max\ 2x_1 - x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &x_1 + 4x_2 &&\geq 8 \\ &x_1 &&\geq 2 \\ &-2x_1 + x_2 &&\leq 4 \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \qquad (c)$$

$$\max\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{8}{3}x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &x_1 + 4x_2 &&\leq 9 \\ &x_1 &&\leq 8 \\ &x_2 &&\leq 2 \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \qquad (d)$$

Capitolo 2

Dualita

ESERCIZIO 2.1. Partendo dalla forma standard, determinare i duali dei programmi lineari dell'esercizio 1.3.

ESERCIZIO 2.2. Partendo dalla forma standard, determinare i duali dei programmi lineari dell'esercizio 1.4.

ESERCIZIO 2.3. Dato il seguente programma lineare in forma standard

$$\max \; cx$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &Ax = b \\ &x \geq 0, \end{aligned} \tag{P}$$

ed il suo duale

$$\min \; ub$$

soggetto a

$$u^T A \geq c, \tag{D}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m_+$ rispondere, utilizzando i concetti di dualità, alle seguenti domande.
(a) Se (P) ammette soluzione ottima finita ($S_{\text{ot}} \neq \emptyset$), sostituendo il vettore b con un vettore perturbato $b + \theta$, $\theta \in \mathbb{R}^m$, è possibile ottenere un programma lineare con obiettivo illimitato?
(b) Se (P) ammette soluzione ottima finita, sostituendo il vettore c con un vettore perturbato $c + \theta$, $\theta \in \mathbb{R}^m$ e ≤ 0, è possibile ottenere un programma lineare con obiettivo illimitato?
(c) Se gli elementi della matrice A sono tutti ≥ 0, (P) può essere un programma lineare con obiettivo illimitato?

ESERCIZIO 2.4. Dati (P) e (D) come nell'esercizio 2.3, ed una soluzione ammissibile duale $\bar{u}$, sia $S = \{j \colon \bar{u}a^j = c_j, 1 \leq j \leq n\}$, dove $a^1, \ldots, a^n$ sono le colonne di A. È possibile affermare che se per il seguente programma lineare (detto *primale ristretto*) esiste una soluzione ammissibile $\bar{x}$ allora $\bar{x}$ e $\bar{u}$ sono soluzioni ottime per (P) e (D) rispettivamente?

$$\max \sum_{j \in S} c_j x_j$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & Ax = b \\ & x_j = 0, \ \forall j \notin S \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{PR}$$

ESERCIZIO 2.5. Risolvere i seguenti programmi lineari, senza impostare il problema di prima fase.

$$\min \ 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 && \geq 4 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 && \geq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{a}$$

$$\min \ 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 - x_3 && \geq 6 \\ & 2x_1 + x_3 && \geq 4 \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 && \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{b}$$

ESERCIZIO 2.6. Partendo dalla riformulazione rispetto alla base ottima, introdurre nell'esercizio 2.5(a) il vincolo supplementare

$$x_1 + 2x_3 \geq 1$$

e riottimizzare il programma, senza ricominciare da capo (come si può fare?).

ESERCIZIO 2.7. Come l'esercizio percedente, ma introducendo in 2.5(b) il vincolo

$$x_1 + x_2 \leq 5.$$

ESERCIZIO 2.8. Per ognuno dei programmi lineari dell'esercizio 1.3, determinare il valore ottimo delle variabili duali se l'ottimo esiste (considerare i duali formulati rispetto alle forme standard), e quando non esiste dire cosa può accadere nel duale.

ESERCIZIO 2.9. Come l'esercizio precedente, con riferimento ai programmi lineari dell'esercizio 1.4.

ESERCIZIO 2.10. Senza passare per la forma standard, scrivere i duali dei programmi lineari dell'esercizio 1.4.

Parte II

Soluzioni

Capitolo 1

Programmazione lineare

1.1. (a) Per giungere alla forma canonica occorre:

- invertire il segno della funzione obiettivo e passare ad un programma di massimo;
- moltiplicare per -1 il primo vincolo;
- sostituire il terzo vincolo con la coppia

$$2x_1 + 4x_3 \leq 12, \qquad -2x_1 - 4x_3 \leq -12;$$

- trasformare la x_3 libera mediante

$$x_3 = u - v, \qquad u, v \geq 0.$$

Quindi si ottiene

$$-\max\ -3x_1 - 4x_2 + 2u - 2v$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&-x_1 - 2x_2 + u - v && \leq -5 \\
&2x_1 + 4u - 4v && \leq 12 \\
&-2x_1 - 4u + 4v && \leq -12 \\
&x_1 + x_2 + u - v && \leq 15 \\
&x_1, x_2, u, v \geq 0.
\end{aligned}$$

(b) Sostituendo x_3 con $-y_3$ e x_2 libera con $u - v$, $u, v \geq 0$, e rimpiazzando il vincolo di uguaglianza con la coppia di disuguaglianze che esso induce si ottiene

$$\max\ 4x_1 - u + v$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&x_1 + u - v + y_3 && \leq 8 \\
&-x_1 - u + v - y_3 && \leq -8 \\
&3x_1 - y_3 && \leq 7 \\
&x_1, y_3, u, v \geq 0.
\end{aligned}$$

(c) Forma canonica:

$$-\max\ -8x_1 + x_2 + y_3$$

soggetto a

$$\begin{array}{ll} -x_1 + y_3 \leq & -4 \\ x_2 + y_3 & \leq 7 \\ x_1 - x_2 & \leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. & \end{array}$$

(d) Forma canonica:

$$\max\ 4x_1 + y_2$$

soggetto a

$$\begin{array}{ll} x_1 - 2y_2 & \leq 2 \\ 2x_1 - 7y_2 & \leq 8 \\ -2x_1 + 7y_2 & \leq -8 \\ x_1, y_2 \geq 0. & \end{array}$$

(e) Forma canonica:

$$-\max\ -4x_1 - 5x_2 + x_3 - 2u + 2v$$

soggetto a

$$\begin{array}{ll} -x_1 - x_2 & \leq -4 \\ x_2 + x_3 & \leq 7 \\ x_3 - u + v & \leq 2 \\ x_1 - u + v & \leq 12 \\ -x_1 + u - v & \leq -12 \\ x_1, x_2.x_3, u, v \geq 0. & \end{array}$$

(f) Forma canonica:

$$\max\ 2x_1 - 4y_3$$

soggetto a

$$\begin{array}{ll} x_1 + u - v - y_3 & \leq 12 \\ -x_1 + u - v & \leq -2 \\ u - v - y_3 & \leq 4 \\ x_1, u, v, y_3 \geq 0. & \end{array}$$

1.2. (a) In base alla definizione di forma canonica, è necessario effettuare le seguenti trasformazoni:

- invertire il segno della funzione obiettivo e passare ad un programma di massimo;
- sostituire la variabile libera $x_3 = u - v$, dove $u, v \geq 0$;
- introdurre una variabile di surplus nel primo vincolo per scriverlo in forma di uguaglianza;
- introdurre una variabile di slack nel terzo vincolo per scriverlo in forma di uguaglianza.

Si ottiene quindi

$$-\max\ -3x_1 - 4x_2 + 2u - 2v$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
& x_1 + 2x_2 - u + v - x_4 && = 5 \\
& 2x_1 + 4u - 4v && = 12 \\
& x_1 + x_2 + u - v + x_5 && = 15 \\
& x_1, x_2, u, v, x_4, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

(b) Forma standard, con x_4 variabile di slack:

$$\max\ 4x_1 - u + v$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
& x_1 + u - v + y_3 && = 8 \\
& 3x_1 - y_3 + x_4 && = 7 \\
& x_1, u, v, y_3, x_4 \geq 0.
\end{aligned}$$

(c) Forma standard:

$$-\max\ -8x_1 + x_2 + y_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
& x_1 - y_3 - x_4 && = 4 \\
& x_2 + y_3 + x_5 && = 7 \\
& x_1 - x_2 + x_6 && = 2 \\
& x_1, \ldots, x_6, y_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

(d) Forma standard:

$$\max 4x_1 + y_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
& x_1 - 2y_2 + x_3 && = 2 \\
& 2x_1 - 7y_2 && = 8 \\
& x_1, y_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

(e) Forma standard:

$$-\max\ -4x_1 - 5x_2 + x_3 - 2u + 2v$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - x_5 && = 4 \\ &x_2 + x_3 + x_6 && = 7 \\ &x_3 - u + v + x_7 && = 2 \\ &x_1 - u + v && = 12 \\ &x_1, \dots, x_7, u, v \geq 0. \end{aligned}$$

(f) Forma standard:

$$\max\ 2x_1 - 4y_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &x_1 + u - v - y_3 + x_4 && = 12 \\ &x_1 - u + v - x_5 && = 2 \\ &x_2 - y_3 + x_6 && = 4 \\ &x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, y_3, u, v \geq 0. \end{aligned}$$

1.3. (a) Come prima cosa occorre *sempre* porre il problema in forma standard, quindi:

$$\max\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 && = 4 \\ &2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 && = 1 \\ &x_1, \dots, x_5 \geq 0, \end{aligned}$$

dove sono state aggiunte le due variabili di *slack* x_4, $x_5 \geq 0$. La presenza di queste due variabili permette di ottenere una riformulazione immediata rispetto alla base $B_0 = \{x_4, x_5\}$.

$$\begin{array}{lrcrrr} \max & z = & 0 & +3x_1 & +2x_2 & -5x_3 \\ & x_4 = & 4 & -4x_1 & +2x_2 & -2x_3 \\ & x_5 = & 1 & -\mathbf{2}x_1 & -x_2 & -x_3 \\ & & \multicolumn{4}{l}{x_1, \dots, x_5 \geq 0 \quad ,} \end{array}$$

corrispondente alla soluzione ammissibile di base $x_4 = 4$, $x_5 = 1$, x_1, x_2, $x_3 = 0$. L'esame dei costi ridotti indica che questa soluzione non è ottima, in quanto γ_1, $\gamma_2 > 0$. Si sceglie quindi x_1 come variabile entrante (criterio del massimo costo ridotto) nella prossima base. La variabile uscente viene scelta in base al criterio

$$\min \left\{ -\frac{\beta_i}{\alpha_{i1}} \right\}_{\alpha_{i1} < 0} = \min \left\{ \frac{4}{4}, \frac{1}{2} \right\} = -\frac{\beta_2}{\alpha_{21}},$$

quindi la variabile uscente è x_5 (cardine$=-2$). La riformulazione rispetto alla nuova base $B_1 = B_0 \cup \{x_1\} - \{x_5\} = \{x_4, x_1\}$ si ottiene applicando l'operazione di cardine sull'elemento individuato.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
\max & z = & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2}x_5 & +\frac{1}{2}x_2 & -\frac{13}{2}x_3 \\
 & x_4 = & 2 & +2x_5 & +4x_2 & \\
 & x_1 = & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}x_5 & -\boldsymbol{\frac{1}{2}}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 \\
 & & \multicolumn{4}{l}{x_1, \ldots, x_5 \geq 0,}
\end{array}
$$

poichè $\gamma_2 > 0$, si effettua l'operazione di cardine sull'elemento $\frac{1}{2}$ evidenziato — scelto con gli stessi, noti criteri — e si passa alla base $B_2 = B_1 \cup \{x_2\} - \{x_1\}$.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
\max & z = & 2 & -2x_5 & -x_1 & -7x_3 \\
 & x_4 = & 6 & -2x_5 & -8x_1 & -4x_3 \\
 & x_2 = & 1 & -x_5 & -2x_1 & -x_3
\end{array}
$$

Poiché γ_5, γ_1, $\gamma_3 \leq 0$, la soluzione ammissibile di base $x_2 = 1$, $x_4 = 6$, x_1, x_3, $x_5 = 0$ risulta ottima, con valore di funzione obiettivo $z = 2$; essendo tutti i costi ridotti strettamente negativi, questa è anche l'unica soluzione ottima.
(b) Riscrivendo il programma in forma standard si ottiene

$$\max\ x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

soggetto a

$$
\begin{aligned}
& x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 && = 2 \\
& 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_5 && = 6 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0,
\end{aligned}
$$

con x_4, x_5 variabili di slack. La base iniziale — disponibile immediatamente — è $B_0 = \{x_4, x_5\}$, corrispondente alla seguente riformulazione.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
\max & z = & 0 & +x_1 & -2x_2 & +3x_3 \\
 & x_4 = & 2 & -x_1 & +2x_2 & -\mathbf{1}x_3 \\
 & x_5 = & 6 & -3x_1 & +x_2 & +2x_3 \\
 & & \multicolumn{4}{l}{x_1, \ldots, x_5 \geq 0.}
\end{array}
$$

Avendo γ_1, $\gamma_3 > 0$, si identifica l'elemento cardine evidenziato, che corrisponde al cambio di base $B_1 = B_0 \cup \{x_3\} - \{x_4\}$, cioè alla riformulazione

$$
\begin{array}{rrrrrr}
\max & z = & 6 & -2x_1 & +4x_2 & -3x_4 \\
 & x_3 = & 2 & -x_1 & +2x_2 & -x_4 \\
 & x_5 = & 10 & -5x_1 & +5x_2 & -2x_4 \\
 & & \multicolumn{4}{l}{x_1, \ldots, x_5 \geq 0.}
\end{array}
$$

A questo punto, avendo $\gamma_2 > 0$ ma nessun coefficiente negativo nella colonna corrispondente, si conclude che il problema è *illimitato* (e quindi $S_{\text{ot}} = \emptyset$) e non si procede oltre. Si può infatti osservare che lungo la semiretta

$$
\begin{aligned}
& x_3 = 2 + 2x_2 \\
& x_5 = 10 + 5x_2 \qquad t \in [0, +\infty) \\
& x_2 = t
\end{aligned}
$$

si trovano soluzioni con $z \to +\infty$ per $t \to +\infty$.
(c) Base ottima $B_{\text{ot}} = \{x_1, x_3\}$ con $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{4}{3}$, $z = \frac{16}{3}$.
(d) Ricavata la forma standard

$$-\max\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 &&= 8\\
&-x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_6 &&= 4\\
&x_1 + x_3 + x_7 &&= 10\\
&x_1, \ldots, x_7 \geq 0,
\end{aligned}$$

con x_5, x_6, x_7 variabili di slack, l'applicazione del simplesso porta a determinare la base ottima $B_{\text{ot}} = \{x_4, x_6, x_3\}$, $x_3 = 10$, $x_4 = 6$, $x_6 = 12$.
(e) Il programma in forma standard risulta

$$\max\ x_1 + 3x_2 - x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 + x_4 &&= 3\\
&x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 &&= 6\\
&2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 &&= 8\\
&x_1, \ldots, x_6 \geq 0,
\end{aligned}$$

con x_4, x_5, x_6 variabili di slack. L'applicazione del simplesso porta a determinare la base ottima $B_{\text{ot}} = \{x_2, x_5, x_6\}$ con $x_2 = 3$, $x_5 = 3$, $x_6 = 5$.
(f) Dalla forma standard

$$\max\ 4x_1 + x_2 + 5x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&-x_1 + x_2 + x_4 &&= 1\\
&2x_2 - x_3 + x_5 &&= 2\\
&x_1 + x_3 + x_6 &&= 1\\
&x_1, \ldots, x_6 \geq 0,
\end{aligned}$$

(x_4, x_5, x_6 variabili di slack) si perviene tramite l'applicazione del simplesso alla base ottima $B_{\text{ot}} = \{x_2, x_5, x_3\}$, con $x_2 = x_3 = x_5 = 1$.

1.4. (a) Il programma in forma standard è

$$-\max\ -6x_1 - x_2 - 3x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&10x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 &&= 15\\
&x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 &&= 6\\
&x_1, \ldots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

Le colonne di x_4, x_5 risultano linearmente indipendenti, (e quindi $\{x_4, x_5\}$ è una base) ma si verifica facilmente che *non corrispondono* ad una soluzione *ammissibile* di base. Occorre quindi procedere alla soluzione del *problema di prima fase,* formulato come segue.

$$\max \ -s_1 - s_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & 10x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 + s_1 && = 15 \\ & x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 + s_2 && = 6 \\ & x_1, \ldots, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Le variabili s_1, s_2 sono anche dette *artificiali* in quanto non appartengono al programma originale. La riformulazione associata alla base iniziale $B_0 = \{s_1, s_2\}$ è

$$\begin{array}{lrrrrrrr} \max & z = & -21 & +11x_1 & -3x_2 & +8x_3 & -x_4 & -x_5 \\ & s_1 = & 15 & -\mathbf{10}x_1 & +2x_2 & -5x_3 & +x_4 & \\ & s_2 = & 6 & -x_1 & +x_2 & -3x_3 & & +x_5 \\ & & \multicolumn{6}{l}{x_1, \ldots, x_5, s_1, s_2 \geq 0.} \end{array}$$

Nota: nella riformulazione sono state eliminate, come dovuto, le variabili in base s_1, s_2 dall'espressione della funzione obiettivo $z = -s_1 - s_2$, per sostituzione dalle relazioni vincolari.

Procedendo ora normalmente, risulta $B_1 = B_0 \cup \{x_1\} - \{s_1\}$, e quindi

$$\begin{array}{lrrrrrrr} \max & z = & -\frac{9}{2} & -\frac{11}{10}s_1 & -\frac{4}{5}x_2 & +\frac{5}{2}x_3 & +\frac{1}{10}x_4 & -x_5 \\ & x_1 = & \frac{3}{2} & -\frac{1}{10}s_1 & +\frac{1}{5}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{1}{10}x_4 & \\ & s_2 = & \frac{9}{2} & \frac{1}{10}s_1 & +\frac{4}{5}x_2 & -\boldsymbol{\frac{5}{2}}x_3 & -\frac{1}{10}x_4 & +x_5 \\ & & \multicolumn{6}{l}{x_1, \ldots, x_5, s_1, s_2 \geq 0.} \end{array}$$

con il cardine selezionato si effettua quindi il cambio di base $B_2 = B_1 \cup \{x_3\} - \{s_2\}$.

$$\begin{array}{lrrrrrrr} \max & z = & 0 & -s_1 & & -s_2 & & \\ & x_1 = & \frac{3}{5} & -\frac{3}{25}s_1 & +\frac{1}{25}x_2 & +\frac{1}{5}s_2 & +\frac{3}{25}x_4 & -\frac{1}{5}x_5 \\ & x_3 = & \frac{9}{5} & +\frac{1}{25}s_1 & +\frac{8}{25}x_2 & -\frac{2}{5}s_2 & -\frac{1}{25}x_4 & +\frac{2}{5}x_5 \\ & & \multicolumn{6}{l}{x_1, \ldots, x_5, s_1, s_2 \geq 0.} \end{array}$$

Poiché la prima fase è terminata con $z = 0$, si conclude che il programma lineare iniziale ammette soluzioni ammissibili. La base $B_2 = \{x_1, x_5\}$ ottenuta non contiene variabili artificiali e può essere utilizzata come punto di partenza per l'applicazione del simplesso al programma iniziale. Si possono quindi eliminare s_1, s_2 e le colonne associate e scrivere la riformulazione

$$\begin{array}{lrrrrr} -\max & z = & -9 & -\frac{11}{5}x_2 & -\frac{3}{5}x_4 & \\ & x_1 = & \frac{3}{5} & +\frac{1}{25}x_2 & +\frac{3}{25}x_4 & -\frac{1}{5}x_5 \\ & x_3 = & \frac{9}{5} & +\frac{8}{25}x_2 & -\frac{1}{25}x_4 & +\frac{2}{5}x_5 \\ & & \multicolumn{4}{l}{x_1, \ldots, x_5, s_1, s_2 \geq 0.} \end{array}$$

Come sopra, nella funzione obiettivo si è provveduto ad eliminare le variabili in base, sostituendo in essa le relazioni vincolari. Non si procede oltre in quanto γ_2, γ_4, $\gamma_5 \leq 0$, e quindi la base corrente è già ottima.

Nota: la funzione obiettivo originale e quella artificiale sono *completamente scorrelate,* quindi la prima fase non dà in generale alcuna garanzia di ottimalità sulla soluzione ammissibile trovata, che potrebbe essere anche molto lontana dall'ottimo.

(b) Il problema in forma standard risulta

$$-\max\ -7x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&4x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 &&= 2\\
&-5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 &&= 1\\
&x_1, \ldots, x_6 \geq 0,
\end{aligned}$$

con x_5 variabile di surplus e x_6 variabile di slack. Non avendo una base ammissibile immediatamente disponibile, occorre risolvere il problema di prima fase

$$\max\ -s_1$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&4x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 + s_1 &&= 2\\
&-5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 &&= 1\\
&x_1, \ldots, x_6, s_1 \geq 0.
\end{aligned}$$

In questo caso solo una variabile artificiale s_1 è strettamente necessaria, in quanto si vede che $B_0 = \{s_1, x_6\}$ forma già una base ammissibile. Procedendo si ottiene

$$\begin{array}{lrrrrrrr}
\max & z = & -2 & +4x_1 & +3x_2 & & +2x_4 & -x_5\\
 & s_1 = & 2 & -\mathbf{4}x_1 & -3x_2 & & -2x_4 & +x_5\\
 & x_6 = & 1 & +5x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & \\
 & & \multicolumn{6}{l}{x_1, \ldots, x_6, s_1 \geq 0.}
\end{array}$$

Facendo cardine sul coefficiente -4 si ottiene $B_1 = B_0 \cup \{x_1\} - \{s_1\}$, e quindi

$$\begin{array}{lrrrrrrr}
\max & z = & 0 & -s_1 & & & & \\
 & x_1 = & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}s_1 & -\frac{3}{4}x_2 & & -\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{4}x_5\\
 & x_6 = & \frac{7}{2} & -\frac{5}{4}s_1 & -\frac{3}{4}x_2 & -x_3 & -\frac{3}{2}x_4 & +\frac{5}{4}x_5\\
 & & \multicolumn{6}{l}{x_1, \ldots, x_6, s_1 \geq 0.}
\end{array}$$

Poiché $z = 0$ nella prima fase, si può passare alla riformulazione rispetto a B_1 del programma iniziale ed applicare il simplesso.

$$\begin{array}{lrrrrrr}
-\max & z = & -\frac{7}{2} & +\frac{13}{4}x_2 & +5x_3 & +\frac{9}{2}x_4 & -\frac{7}{4}x_5\\
 & x_1 = & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4}x_2 & & -\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{4}x_5\\
 & x_6 = & \frac{7}{2} & -\frac{3}{4}x_2 & -\mathbf{1}x_3 & -\frac{3}{2}x_4 & +\frac{5}{4}x_5\\
 & & \multicolumn{5}{l}{x_1, \ldots, x_6 \geq 0.}
\end{array}$$

Facendo cardine sul -1 si cambia $B_2 = B_1 \cup \{x_6\} - \{x_3\}$, ottenendo

$$\begin{array}{lrlllll}
-\max & z = & 14 & -\frac{1}{2}x_2 & -5x_6 & -3x_4 & +\frac{9}{2}x_5 \\
& x_1 = & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4}x_2 & & -\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{4}x_5 \\
& x_3 = & \frac{7}{2} & -\frac{3}{4}x_2 & -x_6 & -\frac{3}{2}x_4 & +\frac{5}{4}x_5 \\
& & x_1, \ldots, x_6 \geq 0. & & & &
\end{array}$$

A questo punto sulla colonna di x_5 si riconosce la condizione di illimitatezza e non si procede oltre. Lungo la semiretta

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_5 \\
x_3 &= \frac{7}{2} + \frac{5}{4}x_5 \qquad t \in [0, +\infty] \\
x_5 &= t
\end{aligned}$$

si trovano soluzioni con $z \to +\infty$ per $t \to +\infty$.
(c) La forma standard è

$$-\max\ -2x_1 - x_2 - 4x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
& x_1 + x_2 + 2x_3 && = 3 \\
& 2x_1 + x_2 + 3x_3 && = 5 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Il problema di prima fase risulta

$$\max\ -s_1 - s_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
& x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 && = 3 \\
& 2x_1 + x_2 + 3x_3 + s_2 && = 5 \\
& x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Risolvendo il problema di prima fase si trova la base ammissibile $B = \{x_3, x_1\}$, e da qui la base ottima $B_{\text{ot}} = \{x_2, x_1\}$ ($x_2 = 1$, $x_1 = 2$).
(d) Il programma in forma standard è (aggiungendo una variabile di slack $x_5 \geq 0$)

$$\max\ x_1 + x_2 + x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
& -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 && = 5 \\
& 4x_2 + x_3 + 2x_4 && = 2 \\
& 3x_2 - 2x_4 + x_5 && = 6 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0,
\end{aligned}$$

ed il relativo problema di prima fase risulta come segue.

$$\max\ -s_1 - s_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
& -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \quad + s_1 = 5 \\
& 4x_2 + x_3 + 2x_4 + s_2 \quad = 2 \\
& 3x_2 - 2x_4 + x_5 \quad = 6 \\
& x_1, \ldots, x_5, s_1, s_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Partendo dalla base $B_0 = \{s_1, s_2, x_5\}$ ($s_1 = 5$, $s_2 = 2$, $x_5 = 6$) si ottiene quanto segue.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
\max & z = & -7 & -x_1 & -6x_2 & +2x_3 & +3x_4 \\
& s_1 = & 5 & +x_1 & +2x_2 & -x_3 & -x_4 \\
& s_2 = & 2 & & -4x_2 & -x_3 & -\mathbf{2}x_4 \\
& x_5 = & 6 & & -3x_2 & & +2x_4 \\
& & \multicolumn{5}{l}{x_1, \ldots, x_5, s_1, s_2 \geq 0;}
\end{array}$$

$B_1 = B_0 \cup \{x_4\} - \{s_2\}$,

$$\begin{array}{rrrrrrr}
\max & z = & -4 & -x_1 & & +\frac{1}{2}x_3 & -\frac{3}{2}s_2 \\
& s_1 = & 4 & +x_1 & +4x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{1}{2}s_2 \\
& x_4 = & 1 & & -2x_2 & -\mathbf{\frac{1}{2}}x_3 & -\frac{1}{2}s_2 \\
& x_5 = & 8 & & -7x_2 & -x_3 & -s_2 \\
& & \multicolumn{5}{l}{x_1, \ldots, x_5, s_1, s_2 \geq 0;}
\end{array}$$

$B_2 = B_1 \cup \{x_3\} - \{x_4\}$,

$$\begin{array}{rrrrrrr}
\max & z = & -3 & -x_1 & -2x_2 & -x_4 & -2s_2 \\
& s_1 = & 3 & +x_1 & +6x_2 & +x_4 & +s_2 \\
& x_3 = & 2 & & -4x_2 & -2x_4 & -s_2 \\
& x_5 = & 6 & & -3x_2 & +2x_4 & \\
& & \multicolumn{5}{l}{x_1, \ldots, x_5, s_1, s_2 \geq 0.}
\end{array}$$

Il problema di prima fase è stato risolto all'ottimo, con valore di funzione obiettivo non nullo, quindi per il programma lineare iniziale *non esiste soluzione ammissibile.*
(e) La forma standard del programma è

$$\max\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
& -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \quad = 2 \\
& -2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 - x_6 \quad = 3 \\
& x_1, \ldots, x_6 \geq 0.
\end{aligned}$$

Dal problema di prima fase si ottiene la base ammissibile $B = \{x_2, x_4\}$, e successivamente, applicando il simplesso alla riformulazione del programma iniziale rispetto a B, si verifica che questo è illimitato.
(f) Non esiste soluzione ammissibile.

1.5. (a) Dalla riformulazione rispetto alla base finale $\{x_4, x_2\}$ si hanno le relazioni

$$\begin{array}{rrrrr} x_4 = & 6 & -2x_5 & +8x_1 & -4x_3, \\ x_2 = & 1 & -x_5 & -2x_1 & -x_3. \end{array}$$

Utilizzando queste relazioni per eliminare le variabili in base dall'obiettivo $z = 7x_1 + x_2 + 4x_3$ si riformula quest'ultimo come

$$\max \quad z = \; 1 \quad -x_5 \quad +5x_1 \quad -x_3,$$

dove il costo ridotto $\gamma_1 > 0$ indica che la base $\{x_2, x_4\}$ non è ottima.
(b) Tenendo presente che min $4x_1 + 5x_2 - x_3$ equivale a max $-4x_1 - 5x_2 + x_3$ nella forma standard, riformulando rispetto alla base finale $\{x_3, x_5\}$ si ottiene

$$\begin{array}{lrrrrr} \max & z = & 2 & -5x_1 & -3x_2 & -x_4 \\ & x_3 = & 2 & -x_1 & +2x_2 & -x_4 \\ & x_5 = & 10 & -5x_1 & +5x_2 & -2x_4. \end{array}$$

I costi ridotti γ_1, γ_2, $\gamma_4 \leq 0$ indicano che la base $\{x_3, x_5\}$ è ottima per il nuovo obiettivo.
(c) Non ottima.
(d) Ottima.
(e) Ottima.
(f) Non ottima.

1.6. (a) La A_B^{-1} si legge nella riformulazione finale, sotto le colonne che nella formulazione iniziale rappresentavano la matrice identità. Quindi, riscrivendo il sistema finale:

$$\begin{array}{lrrrrrrr} \max & z = & 2 & -x_1 & & -7x_3 & & \\ & & 6 = & -8x_1 & & +4x_3 & +x_4 & +2x_5 \\ & & 1 = & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & +x_5. \end{array}$$

La matrice identità appariva, nella riformulazione iniziale, sotto le colonne di x_4, x_5, quindi

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Analogamente, riscrivendo la riformulazione finale si ha

$$\begin{array}{lrrrrrrr} \max & z = & 6 & -2x_1 & +4x_2 & & -3x_4 & \\ & & 2 = & x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & \\ & & 10 = & 5x_1 & -5x_2 & & +2x_4 & +x_5 \end{array}$$

e risulta, tenendo conto che sotto x_4, x_5 appariva la matrice identità,

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

(d) $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(e) $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(f) $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

1.7. La Figura 3.1 illustra le regioni S_a per i programmi lineari in esame. Si possono fare le seguenti considerazioni.
(a) Il punto $(x_1 = 6, x_2 = 1)$ è il punto di S_a più lontano dalla retta $z = 0$, quindi è l'unica soluzione ottima.
(b) Il punto $(x_1 = 2, x_2 = \frac{3}{2})$ è il punto di S_a più vicino alla retta $z = 0$.
(c) Lungo la semiretta $x_1 \geq 8, x_2 = 0$ che appartiene ad S_a si può osservare che si trovano punti con valore di funzione obiettivo grande a piacere, quindi il problema è illimitato.
(d) Il punto $(x_1 = 1, x_2 = 2)$ è a distanza massima dalla retta $z = 0$, e con esso tutti i punti del segmento che lo congiunge a $(x_1 = 8, x_2 = \frac{1}{4})$.

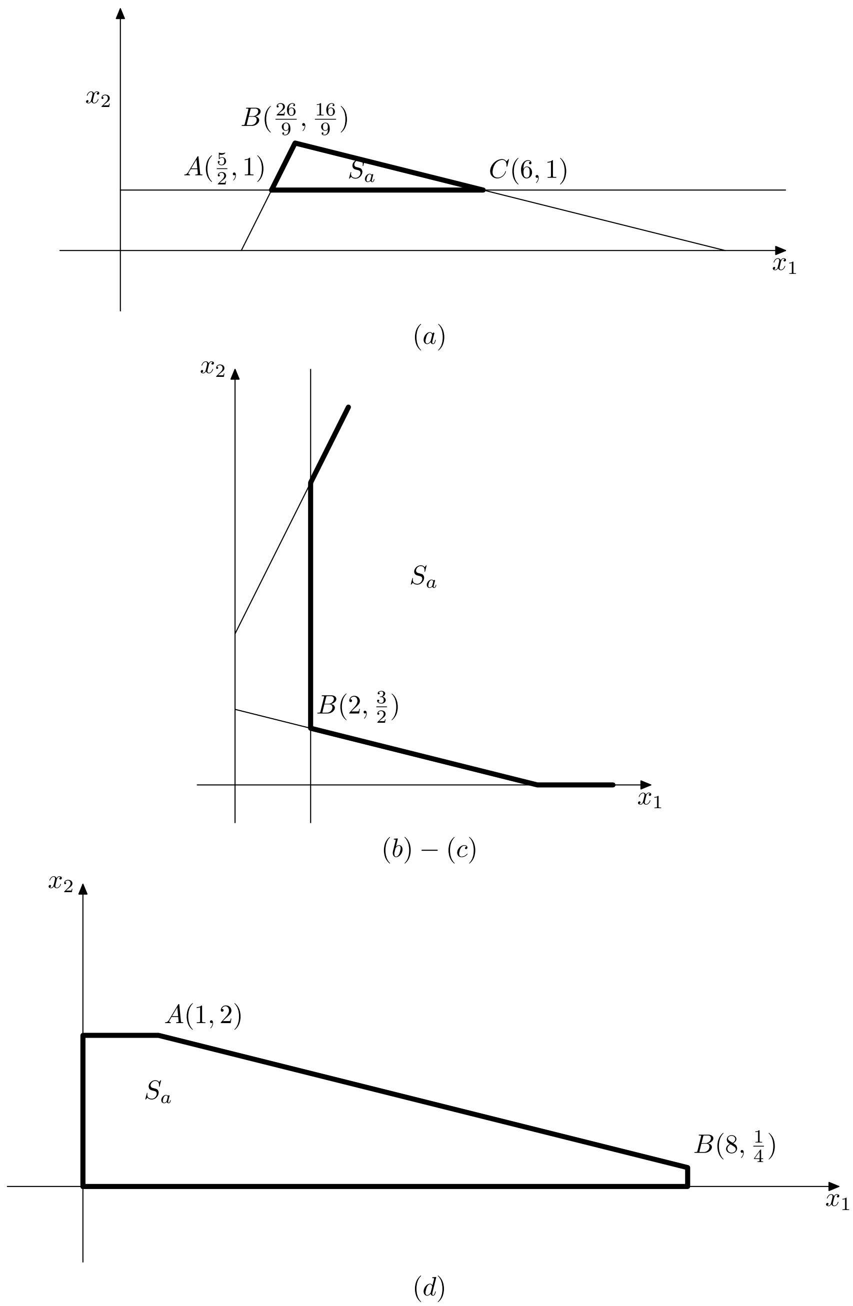

Figura 1.1: Regioni di ammissibilità per l'esercizio 1.7.

Capitolo 2

Dualita

2.1. Riferendosi alle forme standard ottenute per l'esercizio 1.3 si ottengono i seguenti programmi duali.

$$\min\ 4u_1 + u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &4u_1 + 2u_2 && \geq 3 \\ &-2u_1 + u_2 && \geq 2 \\ &2u_1 + u_2 && \geq -5 \\ &u_1, u_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{a}$$

$$\min\ 2u_1 + 6u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &u_1 + 3u_2 && \geq 1 \\ &-2u_1 - 2u_2 && \geq -2 \\ &u_1 - 2u_2 && \geq 3 \\ &u_1, u_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{b}$$

Nota: sommando il secondo e terzo vincolo, si ottiene $-u_1 - 4u_2 \geq 1$, che è incompatibile con i vincoli $u_1, u_2 \geq 0$. Quindi il programma duale (b) non ha soluzione ammissibile. Questo è coerente con quanto ricavato per il primale nell'esercizio 1.3 (programma illimitato).

$$\min\ 2u_1 + 12u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &u_1 + 2u_2 && \geq 2 \\ &u_1 + 3u_2 && \geq 1 \\ &u_1 + 8u_2 && \geq 3 \\ &u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{c}$$

$$\min\ 8u_1 + 4u_2 + 10u_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &2u_1 - u_2 + u_3 && \geq -3 \\ &u_1 + 2u_2 && \geq -1 \\ &-u_1 - 2u_2 + u_3 && \geq 2 \\ &3u_1 + 2u_2 && \geq 1 \\ &u_1, u_2, u_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{d}$$

$$\min\ 3u_1 + 6u_2 + 8u_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &2u_1 + u_2 + 2u_3 && \geq 1 \\ &u_1 + u_2 + u_3 && \geq 3 \\ &3u_2 + 3u_3 && \geq -1 \\ &u_1, u_2, u_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{e}$$

$$\min\ u_1 + 2u_2 + u_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &-u_1 + u_3 && \geq 4 \\ &u_1 + 2u_2 && \geq 1 \\ &-u_2 + u_3 && \geq 5 \\ &u_1, u_2, u_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{f}$$

2.2. Partendo dalle forme standard ricavate per l'esercizio 1.4 si ottengono i seguenti programmi duali.

$$\min\ 15u_1 + 6u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &10u_1 + u_2 && \geq -6 \\ &-2u_1 - u_2 && \geq -1 \\ &5u_1 + 3u_2 && \geq -3 \\ &u_1, u_2 \leq 0. \end{aligned} \tag{a}$$

$$\min\ 2u_1 + u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &4u_1 - 5u_2 && \geq -7 \\ &3u_1 - 3u_2 && \geq -2 \\ &u_2 && \geq 5 \\ &2u_1 - u_2 && \geq 1 \\ &u_1 \leq 0, u_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{b}$$

$$\min\ 3u_1 + 5u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &u_1 + 2u_2 && \geq -2 \\ &u_1 + u_2 && \geq -1 \\ &2u_1 + 3u_2 && \geq -4 \end{aligned} \qquad (c)$$

$$\min\ 5u_1 + 2u_2 + 6u_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &-u_1 && \geq 1 \\ &-2u_1 + 4u_2 + 3u_3 && \geq 1 \\ &u_1 + u_2 && \geq 1 \\ &u_1 + 2u_2 - 2u_3 && \geq 0 \\ &u_3 \geq 0 \end{aligned} \qquad (d)$$

$$\min\ 2u_1 + 3u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &-u_1 - 2u_2 && \geq 4 \\ &2u_1 + u_2 && \geq 3 \\ &u_1 - u_2 && \geq -1 \\ &-u_1 + 5u_2 && \geq 2 \\ &u_1, u_2 \leq 0. \end{aligned} \qquad (e)$$

$$\min\ 2u_1 + 5u_2 + 4u_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &2u_1 + 3u_2 + u_3 && \geq -1 \\ &u_1 + u_2 + 2u_3 && \geq -1 \\ &u_1 + 2u_2 + u_3 && \geq 2 \end{aligned} \qquad (f)$$

2.3. (a) Formando il duale del programma perturbato

$$\max\ cx$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &Ax = b + \theta \\ &x \geq 0, \end{aligned} \qquad (\mathrm{P}')$$

si ottiene

$$\min\ u(b + \theta)$$

soggetto a

$$u^T A \geq c. \tag{D$'$}$$

Si noti che l'insieme delle soluzioni ammissibili duali $D_a = \{u\colon uA \geq c\}$ è lo stesso, sia per (D) che per (D′). Se (P′) fosse illimitato, (D′) non dovrebbe avere soluzioni ammissibili, e quindi $D_a = \emptyset$ anche per (D′). Ma è impossibile, in quanto (P) ha soluzione ottima finita, e quindi il suo duale (D) deve avere regione di ammissibilità non vuota (vedi Osservazione 14, sugli appunti). Quindi (P′) non può essere illimitato.
(b) Il duale del problema perturbato questa volta è

$$\min \; ub$$

soggetto a

$$uA \geq c + \theta. \tag{D$''$}$$

Considerando una qualunque soluzione ammissibile u di (D), risulta

$$uA \geq c \geq c + \theta \qquad (\theta \leq 0).$$

Quindi u è ammissibile anche per (D′′), e questo impedisce che il primale perturbato sia illimitato.
(c) Si può osservare che ponendo

$$u_i = \frac{\max\{c_1, \ldots, c_n\}}{\min\{a_{ij}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\}}$$

si ottiene un u che soddisfa

$$uA \geq c,$$

e quindi una soluzione ammissibile duale. Quindi (P) non può essere illimitato.

2.4. Considerando il prodotto

$$(\bar{u}A - c)\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} [(\bar{u}a^j - c_j)\bar{x}_j]$$

per ogni termine $(\bar{u}a^j - c_j)\bar{x}_j$ risulta che:

- se $\bar{u}a^j - c_j > 0$ allora $\bar{x}_j = 0$ per come è definito (PR);
- se $\bar{x}_j > 0$, allora deve essere $(\bar{u}a^j - c_j) = 0$, sempre per come è stato definito (PR).

Queste condizioni garantiscono che $(\bar{u}A - c)\bar{x} = 0$, quindi $\bar{x}$ e $\bar{u}$ rispettano le condizioni di complementarietà, e sono soluzioni ottime per (P) e (D) rispettivamente.

2.5. (a) Come sempre, occorre riportare il programma alla sua forma standard, che risulta, con x_4, x_5 variabili di surplus:

$$\max\ -3x_1 - x_2 - 3x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 - x_4 && = 4 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 && = 8 \\ & x_1, \ldots, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

È possibile considerare la riformulazione rispetto alla base $B_0 = \{x_4, x_5\}$, che sebbene non risulti ammissibile, risulta ammissibile per il duale.

$$\begin{array}{rrrrrr} \max & z = & 0 & -3x_1 & -x_2 & -3x_3 \\ & x_4 = & -4 & +x_1 & +x_2 & \\ & x_5 = & -8 & +2x_1 & +\mathbf{1}x_2 & -x_3 \\ & & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_5 \geq 0} \end{array}$$

In queste condizioni è possibile applicare il metodo del simplesso duale. In primo luogo si sceglie la variabile da portare *fuori* base: questa deve essere sempre una variabile che crea inammissibilità (cioè < 0). In questo caso, si può scegliere arbitrariamente x_5. La scelta dell'elemento cardine (e quindi della variabile entrante) avviene in base al criterio

$$\min \left\{ -\frac{\gamma_i}{\alpha_{2i}} \right\}_{\alpha_{2i}>0} = \min \left\{ \frac{3}{2}, 1 \right\} = -\frac{\gamma_2}{\alpha_{22}}.$$

Eseguendo quindi la solita operazione di cardine sull'elemento selezionato, si effettua il cambio di base $B_1 = B_0 - \{x_5\} \cup \{x_2\}$, ottenendo

$$\begin{array}{rrrrrr} \max & z = & -8 & -x_1 & -x_5 & -4x_3 \\ & x_4 = & 4 & -x_1 & +x_5 & +x_3 \\ & x_2 = & 8 & -2x_1 & +x_5 & +x_3 \\ & & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_5 \geq 0 \qquad .} \end{array}$$

La base così ottenuta risulta ottima, in quanto γ_1, γ_5, $\gamma_3 \leq 0$ e x_2, $x_4 \geq 0$ (base ammissibile ed ottima).
(b) La forma standard, che usa variabili di surplus x_4, x_5 ed una variabile di slack x_6 rislta

$$\max\ -2x_1 - 3x_2 - x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 && = 6 \\ & 2x_1 + x_3 - x_5 && = 4 \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 + x_6 && = 2 \\ & x_1, \ldots, x_6 \geq 0. \end{aligned}$$

Applicando il metodo del simplesso duale a partire dalla base ammissibile per il duale e non ammissibile per il primale $B_0 = \{x_4, x_5, x_6\}$ risulta quanto segue.

$$\begin{array}{lrrrrr}
\max & z = & 0 & -2x_1 & -3x_2 & -x_3 \\
& x_4 = & -6 & +\mathbf{1}x_1 & +x_2 & -x_3 \\
& x_5 = & -4 & +2x_1 & & +x_3 \\
& x_6 = & 2 & -x_1 & -x_2 & +2x_3 \\
& & & \multicolumn{3}{c}{x_1, \ldots, x_6 \geq 0,}
\end{array}$$

$B_1 = B_0 \cup \{x_1\} - \{x_4\}$

$$\begin{array}{lrrrrr}
\max & z = & -12 & -2x_4 & -x_2 & -3x_3 \\
& x_1 = & 6 & +x_4 & -x_2 & +x_3 \\
& x_5 = & 8 & +2x_4 & -2x_2 & +3x_3 \\
& x_6 = & -4 & -x_4 & & +\mathbf{1}x_3 \\
& & & \multicolumn{3}{c}{x_1, \ldots, x_6 \geq 0,}
\end{array}$$

$B_2 = B_1 \cup \{x_3\} - \{x_6\}$

$$\begin{array}{lrrrrr}
\max & z = & -24 & -5x_4 & -x_2 & -3x_6 \\
& x_1 = & 10 & +2x_4 & -x_2 & +x_6 \\
& x_5 = & 20 & +5x_4 & -2x_2 & +3x_6 \\
& x_3 = & 4 & +x_4 & & +x_6 \\
& & & \multicolumn{3}{c}{x_1, \ldots, x_6 \geq 0,}
\end{array}$$

con B_2 ottima ed ammissibile.

2.6. È possibile procedere nel seguente modo. Si considera la riformulazione del programma rispetto alla base ottima trovata in precedenza

$$\begin{array}{lrrrrr}
\max & z = & -8 & -x_1 & -x_5 & -4x_3 \\
& x_4 = & 4 & -x_1 & +x_5 & +x_3 \\
& x_2 = & 8 & -2x_1 & +x_5 & +x_3 \\
& & & \multicolumn{3}{c}{x_1, \ldots, x_5 \geq 0 \quad .}
\end{array}$$

A questo punto si introduce il nuovo vincolo $x_1+2x_3 \geq 1$ direttamente nella formulazione, procedendo come segue: si scrive il vincolo in forma di uguaglianza, introducendo una nuova variabile di surplus s:

$$x_1 + 2x_3 - s = 1,$$

e si eliminano se necessario le variabili in base x_4, x_2; la variabile s viene portata nella base, che diventa $B = \{x_4, x_2, s\}$.

$$\begin{array}{lrrrrr}
\max & z = & -8 & -x_1 & -x_5 & -4x_3 \\
& x_4 = & 4 & -x_1 & +x_5 & +x_3 \\
& x_2 = & 8 & -2x_1 & +x_5 & +x_3 \\
& s = & -1 & +\mathbf{1}x_1 & & +2x_3 \\
& & & \multicolumn{3}{c}{x_1, \ldots, x_5 \geq 0 \quad .}
\end{array}$$

Si nota che il nuovo vincolo causa inammissibilità ($s < 0$ in base), ma non si perde ammissibilità duale. Quindi, anziché ricominciare da capo si può procedere con il simplesso duale:

$$
\begin{array}{lrrrrr}
\max & z = & -9 & -s & -x_5 & -2x_3 \\
& x_4 = & 3 & -s & +x_5 & +3x_3 \\
& x_2 = & 6 & -2s & +x_5 & +5x_3 \\
& x_1 = & 1 & +s & & -2x_3 \\
& & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_5 \geq 0 \ ,}
\end{array}
$$

trovando la base $\{x_4, x_2, x_1\}$ ammissibile ed ottima.

2.7. Si procede in modo analogo all'esercizio precedente: si considera la formulazione finale

$$
\begin{array}{lrrrrr}
\max & z = & -24 & -5x_4 & -x_2 & -3x_6 \\
& x_1 = & 10 & +2x_4 & -x_2 & +x_6 \\
& x_5 = & 20 & +5x_4 & -2x_2 & +3x_6 \\
& x_3 = & 4 & +x_4 & & +x_6 \\
& & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_6 \geq 0;}
\end{array}
$$

il nuovo vincolo si scrive come

$$x_1 + x_2 + s = 5$$

ed eliminando la x_1 e portando in base s si ottiene

$$
\begin{array}{lrrrrr}
\max & z = & -24 & -5x_4 & -x_2 & -3x_6 \\
& x_1 = & 10 & +2x_4 & -x_2 & +x_6 \\
& x_5 = & 20 & +5x_4 & -2x_2 & +3x_6 \\
& x_3 = & 4 & +x_4 & & +x_6 \\
& s = & -5 & -2x_4 & & -x_6 \\
& & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_6 \geq 0.}
\end{array}
$$

Infine, avendo $\beta_4 = -5 < 0$, costi ridotti ≤ 0 e nessun coefficiente positivo sulla riga di s si conclude che il duale è illimitato, cioè il primale non possiede più soluzione ammissibili.

2.8. (a) I vincoli del duale sono associati alle variabili del primale; le condizioni di complementarietà primale-duale si scrivono come $(uA - c)x = 0$, quindi per $j = 1, \ldots, n$

$$x_j > 0 \qquad \text{implica} \qquad ua^j = c_j,$$

dove $ua^j \geq c_j$ è il vincolo duale corrispondente. In questo caso il duale è

$$\min \ 4u_1 + u_2$$

soggetto a

$$
\begin{array}{lll}
4u_1 + 2u_2 & \geq 3 & (x_1) \\
-2u_1 + u_2 & \geq 2 & (x_2) \\
2u_1 + u_2 & \geq -5 & (x_3) \\
u_1 & \geq 0 & (x_4) \\
u_2 & \geq 0 & (x_5)
\end{array}
$$

e quindi data la base ottima $\{x_2, x_4\}$ si può impostare il sistema

$$\begin{aligned} -2u_1 + u_2 &= 2 \\ u_1 &= 0 \end{aligned} \implies u_1 = 0, u_2 = 2.$$

(b) Il duale non è ammissibile, come già verificato.

(c)
$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 &= 2 \\ u_1 + 8u_2 &= 3 \end{aligned} \implies u_1 = \frac{10}{6}, u_2 = \frac{1}{6}.$$

(d)
$$\begin{aligned} -u_1 - 2u_2 + u_3 &= 2 \\ 3u_1 + 2u_2 &= 1 \\ u_2 &= 0 \end{aligned} \implies u_1 = \frac{1}{3}, u_2 = 0, u_3 = \frac{7}{3}.$$

(e)
$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= 3 \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \implies u_1 = 3, u_2 = 0, u_3 = 0.$$

(f)
$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 &= 1 \\ -u_2 + u_3 &= 5 \\ u_2 &= 0 \end{aligned} \implies u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 5.$$

2.9. (a)
$$\begin{aligned} 10u_1 + u_2 &= -6 \\ 5u_1 + 3u_2 &= -3 \end{aligned} \implies u_1 = \frac{3}{5}, u_2 = 0.$$

(b) Il duale non ha soluzioni ammissibili.

(c)
$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 &= -2 \\ u_1 + u_2 &= -1 \end{aligned} \implies u_1 = 0, u_2 = -1.$$

(d) Poiché il primale non ha soluzioni ammissibili, il duale può essere illimitato o avere regione ammissibile vuota.
(e) Non esiste soluzione ammissibile perché il primale è illimitato.
(f) Il duale è illimitato o ha regione ammissibile vuota in quanto il primale non ha soluzioni ammissibili.

2.10.

$$\max\ 15u_1 + 6u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 10u_1 + u_2 &\le 6 \\ -2u_1 - u_2 &\le 1 \\ 5u_1 + 3u_2 &\le 3 \\ u_1, u_2 &\ge 0. \end{aligned} \qquad (a)$$

$$\max\ 2u_1 + u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &4u_1 - 5u_2 && \leq 7 \\ &3u_1 - 3u_2 && \leq 2 \\ &u_2 && \leq -5 \\ &2u_1 - u_2 && \leq 1 \\ &u_1 \geq 0, u_2 \leq 0. && \end{aligned} \tag{b}$$

$$\max\ 3u_1 + 5u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &u_1 + 2u_2 && \leq 2 \\ &u_1 + u_2 && \leq 1 \\ &2u_1 + 3u_2 && \leq 4 \end{aligned} \tag{c}$$

$$\min\ 5u_1 + 3u_2 + 6u_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &-u_1 && \geq 1 \\ &-2u_1 + 4u_2 + 3u_3 && \geq 1 \\ &u_1 + u_2 && \geq 1 \\ &u_1 + 2u_2 - 2u_3 && \geq 0 \\ &u_3 && \geq 0. \end{aligned} \tag{d}$$

$$\min\ 2u_1 - 3u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &-u_1 + 2u_2 && \geq 4 \\ &2u_1 - u_2 && \geq 3 \\ &u_1 + u_2 && \geq -1 \\ &-u_1 - 5u_2 && \geq 2 \\ &u_1 \leq 0, u_2 \geq 0. && \end{aligned} \tag{e}$$

$$\max\ 2u_1 + 5u_2 + 4u_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &2u_1 + 3u_2 + u_3 && \leq 1 \\ &u_1 + u_2 + 2u_3 && \leq 1 \\ &u_1 + 2u_2 + u_3 && \leq -2 \end{aligned} \tag{f}$$