Risolvere con il simplesso primale-duale il seguente modello di Programmazione Lineare

$$
\begin{aligned}
&\min x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 5x_4 \\
&s.t. \\
&\quad 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 + x_4 = 20 \\
&\quad x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 8 \\
&\quad x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

Il duale corrispondente è:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad 20\lambda_1 + 8\lambda_2 \\
&s.t. \\
&\quad 5\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 \\
&\quad -4\lambda_1 - \lambda_2 \leq 6 \qquad * \\
&\quad 13\lambda_1 + 5\lambda_2 \leq -7 \\
&\quad \lambda_1 + \lambda_2 \leq 5
\end{aligned}
$$

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

è soluzione ammissibile per il Duale e soddisfa alla uguaglianza il vincolo asteriscato

Passo 1)

Considero il problema Primale Ristretto Associato (PR)

$$
\begin{aligned}
&\min y_1 + y_2 \\
&s.t. \\
&\quad -4x_2 + y_1 = 20 \\
&\quad -x_2 + y_2 = 8 \\
&\quad x_2, y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Passo 2)

Calcolo l'ottimo del Primale Ristretto, che vale:

$$y_1 = 20 \qquad y_2 = 8 \qquad z_{PR} = 28$$

$$z_{PR} > 0 \Rightarrow \textbf{proseguo col passo 3}$$

Passo 3)

Considero il Duale del Primale Ristretto Associato (DPR)

$$\begin{aligned}
&\max \quad 20\,u_1 + 8u_2 \\
&s.t. \\
&-4u_1 - u_2 \le 0 \\
&\quad u_1 \le 1 \\
&\quad u_2 \le 1
\end{aligned}$$

Calcolo (p. es. ricavandolo dal tableau finale del Primale Ristretto) il valore dei moltiplicatori ottimi per il duale ristretto

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calcolo

$$\varepsilon_0 = \min_{j:\underline{u}^T \underline{a}_j > 0} \left(\frac{c_j - \underline{\lambda}^T \underline{a}_j}{\underline{u}^T \underline{a}_j} \right)$$

$$\varepsilon_0 = \min \left(\frac{1 - \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}}, \frac{-7 - \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix}}, \frac{5 - \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \right) = \min \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, 4 \right) = \frac{8}{9}$$

$$\underline{\lambda} = \underline{\lambda} + \varepsilon_0 \underline{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{8}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{9} \\ -\dfrac{10}{9} \end{bmatrix}$$

Questo $\underline{\lambda}$ e' soluzione ammissibile per il problema duale e soddisfa alla uguaglianza il vincolo

$$13\lambda_1 + 5\lambda_2 \le -7$$

Passo 1)

Considero il problema Primale Ristretto Associato (PR)

$$\begin{aligned}
&\min y_1 + y_2 \\
&s.t. \\
&\quad 13x_3 + y_1 = 20 \\
&\quad 5x_3 + y_2 = 8 \\
&\quad x_3, y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Passo 2)

Calcolo l'ottimo del Primale Ristretto, che vale:

x_3**=20/13** y_1 **= 0** y_2 **= 4/13** z_{PR} **= 4/13**

$z_{PR} > 0 \Rightarrow$ **proseguo col passo 3**

Passo 3)

Considero il Duale del Primale Ristretto Associato (DPR)

$$\begin{aligned}
&\max \quad 20u_1 + 8u_2 \\
&s.t. \\
&\quad 13u_1 + 5u_2 \leq 0 \\
&\quad u_1 \leq 1 \\
&\quad u_2 \leq 1
\end{aligned}$$

Calcolo (p. es. ricavandolo dal tableau finale del Primale Ristretto) il valore dei moltiplicatori ottimi per il duale ristretto

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} -5/13 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calcolo

$$\varepsilon_0 = \min_{j:\underline{u}^T \underline{a}_j > 0} \left(\frac{c_j - \underline{\lambda}^T \underline{a}_j}{\underline{u}^T \underline{a}_j} \right)$$

$$\varepsilon_0 = \min \left(\frac{6 - \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{10}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -\frac{5}{13} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}}, \frac{5 - \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{10}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -\frac{5}{13} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \right) = \min \left(\frac{520}{63}, \frac{91}{9} \right) = \frac{520}{63}$$

$$\underline{\lambda} = \underline{\lambda} + \varepsilon_0 \underline{u} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{10}{9} \end{bmatrix} + \frac{520}{63} \begin{bmatrix} -5/13 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23/7 \\ 50/7 \end{bmatrix}$$

Questo λ e' soluzione ammissibile per il problema duale e soddisfa alla uguaglianza i vincoli

$$-4\lambda_1 - \lambda_2 \leq 6$$

$$13\lambda_1 + 5\lambda_2 \leq -7$$

Passo 1)

Considero il problema Primale Ristretto Associato (PR)

$$
\begin{aligned}
&\min y_1 + y_2 \\
&s.t. \\
&\quad -4x_2 + 13x_3 + y_1 = 20 \\
&\quad -x_2 + 5x_3 + y_2 = 8 \\
&\quad x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Passo 2)

Calcolo l'ottimo del Primale Ristretto, che vale:

$$x_2 = 4/7 \quad x_3 = 12/7 \quad y_1, y_2 = 0 \quad z_{PR} = 0$$

Ho trovato l'ottimo del Primale P, che è dato da:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 4/7 \quad x_3 = 12/7 \quad x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_P = -60/7$$