Teoria della dualità nella Programmazione Lineare

Corso di Ricerca Operativa
A.A. 2015-2016

Argomenti

- **Problema duale**
- Proprietà della coppia primale-duale

Problema duale

- Introduzione

Per introdurre il concetto di dualità, si consideri un problema di PL, di minimo (che, per semplicità, si assume in forma standard) e si supponga di voler «stimare» il valore ottimo z^* della funzione obiettivo senza «risolvere» esplicitamente il problema.

Una stima per eccesso di z^* (estremo superiore) si può determinare considerando il valore di funzione obiettivo $\bar{z}$ in corrispondenza di una qualsiasi soluzione ammissibile $\bar{x}$ del problema.

Risulta infatti evidente che per qualsiasi soluzione

Problema duale

- Introduzione

Determinare una stima per difetto di z^* (estremo inferiore) è, invece, decisamente più complicato, giacché occorrebbe dimostrare che non esistono soluzioni ammissibili del problema di costo inferiore rispetto al valore stimato.

A tale scopo è di notevole aiuto il seguente Teorema 7.1.

Problema duale

- Teorema 7.1

Dato un problema (P) di PL in forma standard

$$\begin{aligned} \min z(x) &= c^T x && (7.1)\\ s.v. \quad Ax &= b && (7.2)\\ x &\geq 0; && (7.3) \end{aligned}$$

ogni soluzione ammissibile x di (P) è tale che

$$c^T \bar{x} \geq b^T \bar{y};$$

dove $\bar{y}$ è una qualsiasi soluzione ammissibile del problema duale (D) di PL:

$$\begin{aligned} max\, \omega(y) &= b^T y && (7.4)\\ s.v. A^T y &\leq c && (7.5) \end{aligned}$$

Problema duale

- Dimostrazione Teorema 7.1

Considerando una qualsiasi soluzione ammissibile $\bar{y}$ di (D), si ha che

$$c^T \geq \bar{y}^T A \qquad (7.6)$$

Per una qualsiasi soluzione ammissibile $\bar{x}$ di (P), tale per cui, cioè, $A\bar{x} = b$ e $\bar{x} \geq 0$, si ottiene dalle (7.6) la seguente relazione:

$$c^T \bar{x} \geq \bar{y}^T A \bar{x} = \bar{y}^T b$$

da cui segue l'asserto.

Problema duale

- Dimostrazione Teorema 7.1

È evidente che il Teorema 7.1 vale per qualsiasi soluzione ammissibile del problema (P) e, dunque, in particolare, per la soluzione ottima, per cui, per determinare una stima per difetto di z^*, è sufficiente calcolare il valore di una qualsiasi soluzione ammissibile del corrispondente problema (D).

Problema duale

- Esempio

Si consideri il seguente problema (P) di PL:

$$\min z(x) = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$$
$$s.v.$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 16$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 + 12x_4 = 18$$
$$x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4 \geq 0$$

Una stima per eccesso del valore ottimo di (P) si ottiene in corrispondenza del valore di una qualsiasi soluzione ammissibile di (P).

Problema duale

- Esempio

Ad esempio, considerando la soluzione $\bar{x} = [11\ 7\ 2\ 1/2]^T$ avente valore $\bar{z}$ = 65, ciò consente di affermare che $z^* \leq 65$.

Una stima per difetto del valore ottimo di (P), si ottiene, invece, in corrispondenza del valore di una qualsiasi soluzione ammissibile del seguente problema (D) di PL:

$$\max \omega\,(y) = 16y_1 + 18y_2$$
$$s.v.$$
$$y_1 + y_2 \leq 5$$
$$2y_1 - y_2 \leq 2$$
$$-3y_1 + 4y_2 \leq -3$$
$$-6y_1 + 12y_2 \leq 4$$

Problema duale

- Esempio

Ad esempio, $\overline{y} = [1\ 0]^T$ è soluzione ammissibile per (D), il cui valore è $\overline{\omega} = 16$.

Di conseguenza, $z^* \geq 16$. In altri termini, senza risolvere il problema (P), si è ricavato che il suo valore ottimo z^*, qualunque esso sia, è compreso nell'intervallo di valori $[16;\ 65]$.

Problema duale

- Definizioni

Il problema (D) (7.4)–(7.5) prende il nome di **problema «duale»** corrispondente al problema (P) (7.1)–(7.3) che, in tale contesto, prende il nome di **problema «primale»**, mentre entrambi i problemi definiscono la cosiddetta **«coppia primale-duale»**.

È immediato osservare che, mentre il primale è un problema di minimo, il duale è un problema di massimo e che i termini noti di un problema sono i coefficienti della funzione obiettivo dell’altro.

Inoltre, a ciascuna variabile del primale corrisponde univocamente un vincolo del duale e a ciascuna variabile del duale è univocamente associato un vincolo del primale.

Problema duale

- Esempio

Si considerino i problemi (P) e (D) riportati nel precedente riquadro.

Al vincolo

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 16$$

di (P) è associata univocamente la variabile di decisione y_1 di (D).

Analogamente, al vincolo

$$-6y_1 + 12y_2 \leq 4$$

di (D) corrisponde in modo univoco la variabile di decisione x_4 di (P).

Problema duale

A ogni formulazione di un problema di PL diversa da quella standard resta associato, conformemente alla formulazione introdotta nel Teorema 7.1, un problema duale.

Si consideri, ad esempio, il seguente problema primale:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= c^T x \\ s.v. \quad Ax &\geq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema duale

Esso può, equivalentemente, essere riscritto nel modo seguente:

$$\min z(x,s) = c^T x + 0^T s$$
$$s.v.$$
$$Ax - I_m s = b$$
$$x, s \geq 0;$$

dove $s \in R^m$ rappresenta il vettore delle variabili ausiliarie di «**surplus**».

Problema duale

Pertanto, il corrispondente problema duale risulta essere:

$$\begin{aligned} \max \omega(y) \;&=\; b^T y \\ s.v. \quad A^T y \;&\leq\; c \\ -I_m y \;&\leq\; 0; \end{aligned}$$

ovvero, equivalentemente:

$$\begin{aligned} \max \omega\,(y) \;&=\; b^T y \\ s.v.\ A^T y \;&\leq\; c \\ y \;&\geq\; 0 \end{aligned}$$

Da questo esempio, si può desumere che a ogni vincolo di disuguaglianza del primale è associata una variabile vincolata in segno nel duale.

Problema duale

Si consideri ora il seguente problema primale, in cui le variabili di decisione non sono vincolate in segno:

$$\min z(x) = c^T x$$

$$s.v.\ Ax = b.$$

$$Ponendo$$

$$x = x^{+} - x^{-};$$

$$x^{+};\ x^{-} \geq 0$$

(ogni variabile non vincolata in segno può essere sostituita da una coppia di variabili non negative).

Problema duale

Il problema primale può riscriversi in maniera equivalente come

$$\min z(x^+; x^-) = c^T x^+ - c^T x^-$$
$$s.v. \quad Ax^+ - Ax^- = b$$
$$x^+; x^- \geq 0$$

il cui duale risulta

$$\max \omega(y) = b^T y$$
$$s.v. A^T y \leq c$$
$$-A^T y \leq -c.$$

Problema duale

Osservando che i vincoli del duale possono riscriversi nella forma $A^T y = c$, il duale è equivalente a

$$\max \omega\,(y) = b^T y$$
$$s.v.\;\; A^T y = c.$$

Ciò significa che, se le variabili del primale non sono vincolate in segno, i vincoli del duale sono soddisfatti all'uguaglianza.

Problema duale

Infine, qualora il primale sia dato nella forma

$$\max z(x) = c^T x$$
$$s.v.\ Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

esso può, equivalentemente, essere riscritto nel modo seguente:

$$\min z(x,s) = -c^T x - 0^T s$$
$$s.v.\quad Ax + I_m s = b$$
$$x, s \geq 0$$

dove $s \in R^m$ rappresenta il vettore delle variabili ausiliarie di «**slack**».

Problema duale

Il duale risulta essere

$$\begin{aligned} \max \omega(y') &= b^T y' \\ s.v.\, A^t y' &\leq -c \\ I_m y' &\leq 0 \end{aligned}$$

ovvero, rimpiazzando y' con $y = -y'$,

$$\begin{aligned} \min \omega\,(y) &= b^T y \\ s.v.\ \ A^t y &\geq c \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

In altri termini, se la funzione obiettivo del primale è da massimizzare, il corrispondente duale è un problema di minimo.

Problema duale

Riassumendo, l'insieme delle proprietà di «simmetria» nella coppia primale-duale viene espresso attraverso le seguenti regole generali:

- ✓a un vincolo di disuguaglianza nel primale corrisponde una variabile vincolata in segno nel duale;
- ✓a un vincolo di uguaglianza nel primale corrisponde una variabile libera in segno nel duale;
- ✓a una variabile vincolata in segno nel primale corrisponde un vincolo di disuguaglianza nel duale;
- ✓a una variabile libera in segno nel primale corrisponde un vincolo di uguaglianza nel duale;
- ✓se la funzione obiettivo del primale è in forma di minimo, la funzione obiettivo del duale è in forma di massimo e viceversa,

ovvero, più formalmente, dal seguente teorema, la cui dimostrazione ricalca le modalità utilizzate per costruire il duale dei vari problemi di PL introdotti in precedenza.

Problema duale

- Teorema 7.2

Dato il seguente problema di PL:

$$
\begin{aligned}
\min z(x) &= c^T x \\
&s.v. \\
a^T{}_i x &\geq b_i;\ i \in I_1 \\
a^T{}_i x &\leq b_i;\ i \in I_2 \\
a^T{}_i x &= b_i;\ i \in I_3 \\
x_j &\geq 0;\ j \in J_1 \\
x_j &\leq 0;\ j \in J_2 \\
x_j &\ libera;\ j \in J_3;
\end{aligned}
$$

Problema duale

- Teorema 7.2

il suo duale è

$$
\begin{gathered}
\max \omega(y) = b^T y \\
s.v. \\
y^T A_j \leq c_j \, ; \; j \in J_1 \\
y^T A_j \geq c_j \, ; \; j \in J_2 \\
y^T A_j = c_j \, ; \; j \in J_3 \\
y_i \geq 0; \; i \in I_1 \\
y_i \leq 0; \; i \in I_2 \\
y_i \; libera; \; i \in I_3.
\end{gathered}
$$

Problema duale

- Esempio

Dato il seguente problema di PL:

$$
\begin{gathered}
\min z(x) = 8x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 7x_4 \\
s.v. \\
4x_1 - 6x_2 + 8x_3 + 2x_4 \leq 27 \\
-x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 \geq 12 \\
x_1 - 2x_4 = 20 \\
x_1, x_2 \geq 0 \\
x_4 \leq 0,
\end{gathered}
$$

Problema duale

- Esempio

il corrispondente problema duale è

$$\max \omega(y) = 27y_1 + 12y_2 + 20y_3$$
$$s.v.$$
$$4y_1 - y_2 + y_3 \leq 8$$
$$-6y_1 + 3y_2 \leq 5$$
$$8y_1 + 5y_2 = 12$$
$$2y_1 + 3y_2 - 2y_3 \geq 7$$
$$y_1 \leq 0$$
$$y_2 \geq 0.$$

Problema duale

- Esempio

Dato il seguente problema di PL:

$$\max z(x) = 6x_1 + 8x_2 + 4x_3$$
$$s.v.$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10$$
$$3x_1 + 5x_2 = 15$$
$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0,$$

Problema duale

- Esempio

il corrispondente problema duale è

$$\min \omega(y) = 10y_1 + 15y_2 + 20y_3$$
$$s.v.$$
$$y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 6$$
$$y_1 + 5y_2 + 2y_3 \geq 8$$
$$2y_1 + 4y_3 = 4$$
$$y_1 \geq 0$$
$$y_3 \leq 0.$$

Argomenti

- Problema duale
- **Proprietà della coppia primale-duale**

Proprietà della coppia primale-duale

- Introduzione

Dato il problema (P) primale in forma standard:

$$\min z(x) = c^T x \quad (7.1)$$
$$s.v. \quad Ax = b \quad (7.2)$$
$$x \geq 0 \quad (7.3)$$

a cui corrisponde il problema duale (D):

$$\max \omega(y) = b^T y \quad (7.4)$$
$$s.v. A^T y \leq c \quad (7.5)$$

Valgono le seguenti proprietà.

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.3

<u>Il duale del problema duale è il problema primale.</u>

Dimostrazione. La dimostrazione segue immediatamente dalle regole di costruzione del duale.

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\max \omega(y) = b^T y$$
$$s.v.\, A^T y \leq c$$
$$ponendo$$
$$y = y^+ - y^-;$$
$$y^+, y^- \geq 0$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.3

Introducendo il vettore $t \in R^n$ delle variabili ausiliare di «**surplus**», il problema può essere scritto equivalentemente come

$$\max \omega(y^+, y^-) = b^T y^+ - b^T y^-$$
$$s.v.\, A^T y^+ - A^t y^- + t = c$$
$$y^+, y^+, t \geq 0$$

ovvero, equivalentemente,

$$-\min[\omega'(y^+, y^-) = -b^T y^+ + b^T y^-]$$
$$s.v.\, A^T y^+ + A^t y^- - t = -c$$
$$y^+, y^+, t \geq 0$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.3

Il cui duale risulta

$$-\max[z'(x) = -c^T x]$$
$$s.v. -Ax \leq -b$$
$$Ax \leq b$$
$$-I_n x \leq 0.$$

Tale problema, a sua volta, può scriversi equivalentemente come:

$$\min z(x) = c^T x$$
$$s.v. Ax = b$$
$$x \geq 0.$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Dato il seguente problema (P) di PL:

$$\max z(x) = 2x_1 + 4x_2 + 7x_3$$
$$s.v.\, x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 \geq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_3 \leq 0;$$

il corrispondente problema duale (D) è

$$\min w(y) = 2y_1 + 8y_2$$
$$s.v.\, y_1 + 3y_2 \geq 2$$
$$3y_1 - y2 \geq 4$$
$$-5y_1 + y_2 \leq 7$$
$$y_1 \geq 0$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

A sua volta, il duale del problema (D) è

$$\max z(x) = 2x_1 + 4x_2 + 7x_3$$
$$s.v.\, x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 \geq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_3 \leq 0;$$

che corrisponde al problema (P).

Proprietà della coppia primale-duale

- Corollari del Teorema 7.1

Il Teorema 7.3 giustifica la denominazione data di coppia primale-duale e ne chiarisce ulteriormente il senso.

Una prima importante proprietà è già stata introdotta nella precedente sezione e corrisponde al Teorema 7.1, noto come teorema di «dualità debole», da cui discendono i seguenti due corollari.

Corollario 7.1 (<u>Condizioni sufficienti di ottimalità</u>)

Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile del problema primale (7.1)–(7.3) e $\bar{y}$ una soluzione ammissibile del problema duale (7.4)–(7.5).

Se $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$ allora x e y sono soluzione ottime per i rispettivi problemi.

Proprietà della coppia primale-duale

- Corollario 7.1

<u>Dimostrazione</u>.

Dal teorema di dualità debole si ha che $b^T\bar{y} \leq c^T x$, per ogni $x \in P$.

Dall'ipotesi $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$ discende $c^T\bar{x} \leq c^T x$, per ogni $x \in P$.

Ne segue l'ottimalità di $\bar{x}$ per il problema primale.

Analogamente, per il problema duale, $b^T\bar{y} \geq b^T y$, per ogni $y \in D$, che implica l'ottimalità di $\bar{y}$ per il problema duale.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Si consideri la seguente soluzione ammissibile $\hat{x} = [0\ 118/5\ 52/5\ 0]^T$, avente valore $\hat{z} = 16$, per il problema (P) di PL:

$$\min z(x) = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$$
$$s.v.$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 16$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 + 12x_4 = 18$$
$$x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4 \geq 0.$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Dal momento che per il corrispondente duale (D) di (P):

$$\max \omega\,(y) = 16y_1 + 18y_2$$
$$s.v.$$
$$y_1 + y_2 \leq 5$$
$$2y_1 - y_2 \leq 2$$
$$-3y_1 + 4y_2 \leq -3$$
$$-6y_1 + 12y_2 \leq 4$$

era stata determinata una soluzione ammissibile $\bar{y} = [1\ 0]^T$ avente valore ω = 16, ciò consente di «**certificare**» l'ottimalità della soluzione $\hat{x}$ per (P) e $\bar{y}$ per (D), rispettivamente.

Proprietà della coppia primale-duale

- Corollario 7.2

➢Se il problema primale (7.1)–(7.3) è illimitato inferiormente, allora il problema duale (7.4)–(7.5) non ammette soluzioni ammissibili.

➢Se il problema duale (7.4)–(7.5) è illimitato superiormente, allora il problema primale (7.1)–(7.3) non ammette soluzioni ammissibili.

Dimostrazione.

Si supponga, per assurdo, che il problema primale sia illimitato inferiormente e che esista una soluzione ammissibile $\bar{y}$ per il problema duale.

Proprietà della coppia primale-duale

- Corollario 7.2

Per il teorema di dualità debole, deve essere $c^T x \geq b^T \bar{y}$, per ogni $x \in P$, contraddicendo l'ipotesi che il primale sia illimitato inferiormente ($b^T \bar{y}$ sarebbe infatti una limitazione inferiore per tutti i valori della funzione obiettivo del problema primale).

Analogamente, l'esistenza di una soluzione ammissibile del problema primale impedisce che il problema duale possa essere illimitato superiormente.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

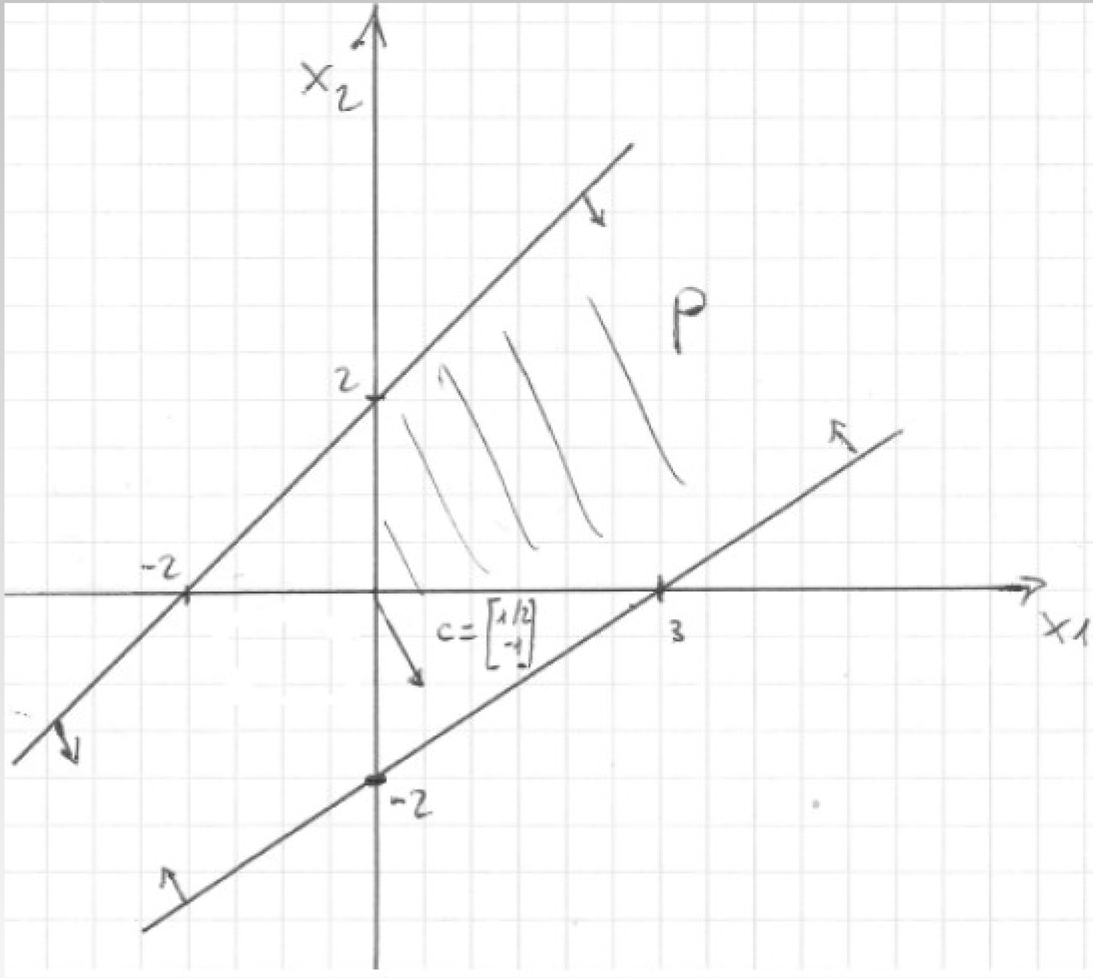
Dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = 1/2x_1 - x_2$$
$$s.v.\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6$$
$$-x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0;$$

È dimostrato per via grafica essere illimitato inferiormente (vedi Figura 7.1)

Proprietà della coppia primale-duale

- Figura 7.1 – Problema illimitato inferiormente



Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Il corrispondente problema duale

$$\max \omega(y) = 6y_1 + 2y_2$$
$$s.v.$$
$$2y_1 - y_2 \leq 1/2$$
$$-3y_1 + y_2 \leq -1$$
$$y_1, y_2 \leq 0$$

è inammissibile.

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.4 (di Dualità Forte)

Una soluzione ammissibile $\bar{x}$ per il problema primale (7.1)–(7.3) è ottima se e solo se esiste una soluzione ammissibile $\bar{y}$ per il problema duale (7.4)–(7.5) tale che $c^T\bar{x} = b^T \bar{y}$.

In tal caso, y è soluzione ottima per il problema duale.

Dimostrazione.

(*Condizione sufficiente*). Se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ammissibili, rispettivamente, del problema primale e del problema duale, tali che $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$, allora, dal **Corollario 7.1**, segue immediatamente che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime del problema primale e del problema duale, rispettivamente.

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.4 (di Dualità Forte)

(*Condizione necessaria*). Sia $\bar{x}$ una soluzione ottima per il problema primale.

Il **Corollario 6.1** implica l'esistenza di una SBA x^*, rispetto all'insieme di indici di base , avente lo stesso valore di funzione obiettivo di $\bar{x}$ e tale da soddisfare le condizioni sufficienti di ottimalità espresse dal **Teorema 6.1**, ovvero,

$$x^*_B = A^{-1}_B b;$$

$$x^*_N = 0,$$

di valore pari a $z* = c^T{}_B A^{-1}{}_B b$ e tale che

$$\bar{c}^T = c^T - c^T{}_B A^{-1}{}_B A \geq 0^T. \quad (7.7)$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.4 (di Dualità Forte)

Sia $\bar{y}^T = c^T_B A^{-1}_B$.

Si osserva che $\bar{y}$ è soluzione ammissibile del problema duale.

Infatti, i vincoli (7.5) possono scriversi equivalentemente come $c^T \geq y^T A$, che sono soddisfatti in corrispondenza di y = $\bar{y}$, giacché $c^T \geq c^T{}_B A^{-1}{}_B A$ coincidono con le (7.7).

Il valore della soluzione $\bar{y}$ è dato da $\bar{\omega} = \bar{y}^T b = c^T_B A^{-1}_B b$, che è uguale a z^*, ovvero il valore di una soluzione ammissibile per il problema primale.

Dal Corollario 7.1 segue che $\bar{y}$ è soluzione ottima del problema duale.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = 14x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 30x_4$$
$$s.v.$$
$$7x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 4$$
$$5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

il cui problema duale risulta essere

$$\max \omega\,(y) = 4y_1 + 6y_2$$
$$s.v.$$
$$7y_1 + 5y_2 \leq 14$$
$$6y_1 - 3y_2 \leq -6$$
$$3y_1 + 6y_2 \leq 3$$
$$-6y_1 + 5y_2 \leq 30.$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

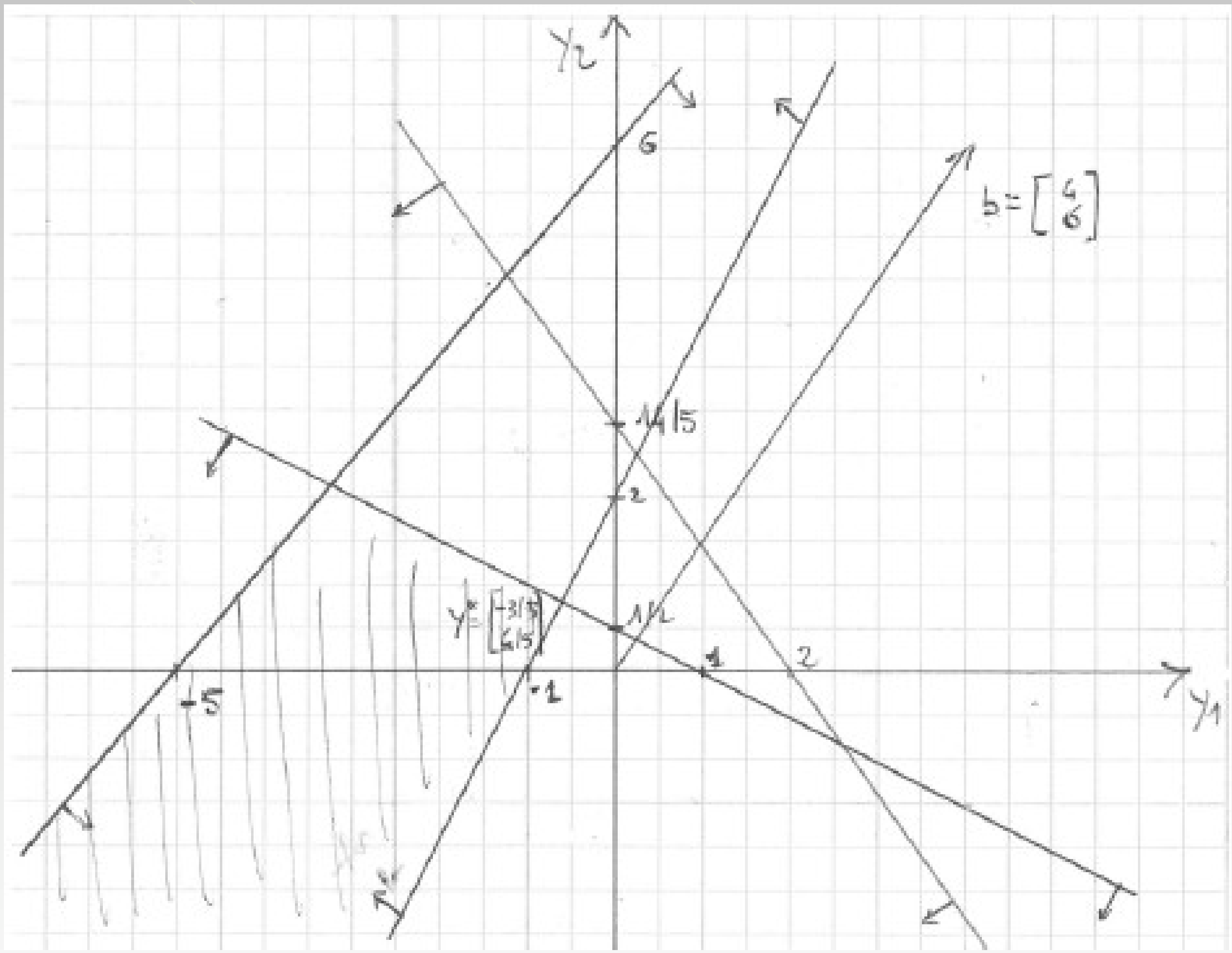
La soluzione ottima del problema primale è $x^* = [0\ 2/15\ 16/15\ 0]^T$, con valore $z* = 12/5$.

Di conseguenza, in base al teorema di dualità forte, il problema duale ha soluzione ottima $y*$ avente valore $\omega^* = 12/5$.

Infatti, risolvendo graficamente il problema duale (vedi Figura 7.2), si ricava che $y^* = [-3/5\ 4/5]^T$, a cui corrisponde il valore $\omega^* = 12/5$.

Proprietà della coppia primale-duale

- Figura 7.2 Soluzione grafica del problema duale



Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.5

Data la coppia primale-duale (7.1)–(7.3)-(7.4)–(7.5), è vera esattamente una delle seguenti affermazioni:

1. i problemi primale e duale ammettono, soluzioni ottime finite, rispettivamente x^* e y^*, tali che $c^T x^* = b^T y^*$;
2. il problema primale è illimitato inferiormente e il duale è inammissibile;
3. il problema duale è illimitato superiormente e il primale è inammissibile;
4. i problemi primale e duale sono entrambi inammissibili.

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.5

Dimostrazione.

Si osservi preliminarmente che la veridicità di ciascuna delle quattro affermazioni esclude la veridicità delle altre tre.

Per dimostrare la tesi è quindi sufficiente dimostrare che in nessun caso le quattro affermazioni possono essere tutte false.

Primale e duale possono ammettere soluzione ottima o meno.

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.5

Il **teorema di dualità forte** impone che se uno dei due problemi ammette soluzione ottima deve necessariamente essere vera l'**affermazione 1**.

Resta quindi da verificare solo il caso in cui primale e duale non ammettono soluzione ottima.

Il **Corollario 7.2** impone che se uno dei due problemi è illimitato (inferiormente se il problema è di minimo, superiormente se di massimo) è necessariamente vera l'**affermazione 2** oppure l'**affermazione 3**.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

L'**affermazione 4** copre infine il caso in cui primale e duale non ammettano soluzione ottima e non siano illimitati.

Questo caso può in effetti verificarsi.

Per costruire una coppia di problemi primale-duale entrambi non ammissibili è sufficiente prendere un sistema $Ax = b$ incompatibile e aggiungere una funzione obiettivo e dei vincoli di segno sulle variabili primali in modo tale che, oltre al problema primale, anche il duale sia inammissibile.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Si consideri il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = 4x_1 - 9x_2$$
$$s.v.$$
$$x_1 - 2x_2 = 3$$
$$2x_1 - 4x_2 = -5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

inammissibile, giacché il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$$

è incompatibile.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Il corrispondente problema duale è

$$\max \omega(y) = 3y_1 - 5y_2$$
$$s.v.$$
$$y_1 + 2y_2 \leq 4$$
$$-2y_1 - 4y_2 \leq -9$$

anch'esso chiaramente inammissibile.

Proprietà della coppia primale-duale

- Corollario 7.3

Il seguente corollario al teorema di dualità forte stabilisce un importante risultato.

Due vettori $\bar{x}$ e $\bar{y}$sono soluzioni ottime, rispettivamente, per il problema primale (7.1)–(7.3) e per il problema duale (7.4)–(7.5) se e solo se soddisfano il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} A\bar{x} &= b \\ \bar{x} &\geq 0 \end{aligned}\right\} (ammisibilit\grave{a}\ primale) \\ \\ A^T\bar{y} \leq c \ \ (\text{ammiss}ibilit\grave{a}\ duale) \\ c^T\bar{x} = b^T\bar{y}\,(condizioni\ di\ ottimalit\grave{a}) \end{cases}$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Corollario 7.3

Il Corollario 7.3 stabilisce che il problema di trovare una soluzione ammissibile di un sistema di disequazioni è altrettanto difficile rispetto a trovare una soluzione ottima di un problema di PL, fatto non intuitivo in quanto sembrerebbe che trovare una soluzione ammissibile sia decisamente più semplice di trovare una soluzione ottima.

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.6

Data una coppia di soluzioni ottime, una per il problema primale e una per il duale, si può fornire un'ulteriore caratterizzazione delle stesse avvalendosi delle cosiddette «**condizioni di ortogonalità**».

Sia $\bar{x} \in R^n$ una soluzione ammissibile del problema primale (7.1)–(7.3) e $\bar{y} \in R^m$ una soluzione ammissibile del problema duale (7.4)–(7.5); $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime per i rispettivi problemi se e solo se soddisfano le seguenti condizioni di ortogonalità:

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i\right)\bar{x}_j = 0,\ j=1,\ldots,n. \qquad (7.8)$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.6

<u>Dimostrazione</u>.

Si osservi preliminarmente che, in virtù dell'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ per i rispettivi problemi, le condizioni di ortogonalità (7.8) possono equivalentemente riscriversi come un'unica equazione

$$(c^T - \bar{y}^T A)\bar{x} = 0 \qquad (7.9)$$

dal momento che le(7.8) implicano il soddisfacimento della (7.9) e viceversa.

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.6

(*Condizione necessaria*).

Si supponga che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ siano soluzioni ottime per i rispettivi problemi.

Dal **teorema di dualità forte** si ha che

$$c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$$

ovvero,

$$c^T \bar{x} - \bar{y}^T b = 0 \qquad (7.10)$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.6

(*Condizione necessaria*).

Essendo $\bar{x}$ soluzione ammissibile per il primale, la (7.10) può scriversi come

$$c^T \bar{x} - \bar{y}^T A \bar{x} = 0$$

ovvero,

$$(c^T - \bar{y}^T A) \bar{x} = 0.$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.6

(*Condizione sufficiente*).

Se le soluzioni x e y soddisfano la relazione (7.9), si ha che

$$c^T \bar{x} = \bar{y}^T A \bar{x} \qquad (7.11)$$

Essendo $\bar{x}$ soluzione ammissibile per il primale, la (7.11) è equivalente a

$$c^T \bar{x} = \bar{y}^T b.$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.6

(*Condizione sufficiente*).

Dal **Corollario 7.1**, segue l'ottimalità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ per i rispettivi problemi.

Le condizioni di ortogonalità rappresentano uno strumento molto utile e versatile nell'ambito della teoria della dualità.

In particolare, possono essere utilizzate per «**certificare**» agevolmente l'ottimalità di una data soluzione per un problema di PL.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4$$
$$s.v.$$
$$-2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 15$$
$$4x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 31$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

e sia $\bar{x} = [2\ 3\ 1/2\ 0\ ]^T$, una soluzione ammissibile avente valore $\bar{z} = 27/2$.

Per verificare se $\bar{x}$ è eventualmente soluzione ottima, è possibile ricorrere al Teorema 7.6 delle condizioni di ortogonalità, in base al quale è sufficiente verificare l'eventuale ammissibilità della soluzione duale $\bar{y}$ che, assieme a $\bar{x}$ soddisfi le condizioni di ortogonalità (7.8)

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Operativamente, si inizia con il costruire il duale del problema primale in esame:

$$\max \omega\,(y) = 15y_1 + 31y_2$$

$$s.v.$$

$$-2y_1 + 4y_2 \leq 4$$

$$5y_1 + 8y_2 \leq 2$$

$$8y_1 - 2y_2 \leq -1$$

$$5y_1 + 6y_2 \leq 2$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Le condizioni di ortogonalità sono: $\begin{cases} (4 + 2y_1 - 4y_2)x_1 = 0 \\ (2 - 5y_1 - 8y_2)x_2 = 0 \\ (-1 - 8y_1 + 2y_2)x_3 = 0 \\ (2 - 5y_1 - 6y_2)x_4 = 0 \end{cases}$

Essendo $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3 > 0$, soddisfare le condizioni di ortogonalità in corrispondenza di $\bar{x}$ vuol dire che occorre cercare una soluzione del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} -2y_1 + 4y_2 = 4 \\ 5y_1 + 8y_2 = 2 \\ 8y_1 - 2y_2 = -1 \end{cases}$$

che è chiaramente impossibile.

Segue pertanto che $\bar{x}$ non è soluzione ottima del problema considerato.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

È anche possibile utilizzare le condizioni di ortogonalità per determinare la soluzione ottima del problema duale, nota la soluzione ottima del problema primale e viceversa.

Si consideri la coppia primale-duale del riquadro precedente e si assuma nota la soluzione ottima del problema duale $y^* = [-2/3 \; 2/3]^T$, avente valore pari a $\omega^* = 32/3$.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Per determinare la soluzione ottima del problema primale, si osserva che, in corrispondenza di y^*, il primo e il secondo vincolo del problema duale sono soddisfatti per uguaglianza, mentre il terzo e il quarto vincolo sono soddisfatti per disuguaglianza stretta.

Di conseguenza, dalle condizioni di ortogonalità, si ricava che la soluzione ottima x^* del problema primale è tale per cui $x^*_3 = x^*_4 = 0$.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Dal momento che x^* deve essere ammissibile, segue che x^*_1 e x^*_2 devono essere soluzioni del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 = 15 \\ 4x_1 + 8x_2 = 31 \end{cases}$$

ovvero, $x^*_1 = 35/36$ e $x^*_2 = 61/18$.

Riassumendo, $x^* = [35/36\ 61/18\ 0\ 0]^T$ è la soluzione ottima del problema primale, avente valore $z^* = w^* = 32/3$.

Proprietà della coppia primale-duale

Più dettagliatamente, si supponga che il problema primale ammetta soluzione ottima finita (e non degenere) e si indichi con x^* la soluzione ottima di base rispetto all'insieme di indici di base B.

Dal momento che $x^*_j > 0, j \in B$, per soddisfare le condizioni di ortogonalità (7.8), la soluzione ottima duale y^* deve essere soluzione del seguente sistema di equazioni:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j,\ j \in B \qquad (7.12)$$

ovvero, in forma compatta,

$$A^T{}_B y = c_B.$$

Proprietà della coppia primale-duale

In altri termini, dal momento che l'insieme di indici di base B è formato da m elementi, le (7.12) definiscono un sistema quadrato di m equazioni nelle incognite $y_i, i = 1, \dots, m$.

Essendo le colonne della matrice A_B linearmente indipendenti, il sistema (7.12) ha soluzione unica y^* data da

$$y^{*T} = c^T{}_B A^{-1}{}_B \qquad (7.13)$$

Si può verificare che tale soluzione coincide con quella definita nella dimostrazione del teorema di dualità forte.

Proprietà della coppia primale-duale

Essa prende il nome di soluzione «**complementare**» a x^* rispetto all'insieme di indici di base B e ad essa corrisponde una soluzione di base per il problema duale, una volta che tale problema venga posto in forma standard.

Nel caso di soluzione di base ottima degenere per il problema primale (con coefficienti di costo ridotto non negativi), è facile rendersi conto che la soluzione y^* definita dalla (7.13) non è l'unica soluzione ammissibile duale a soddisfare le condizioni di ortogonalità.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4$$
$$s.v.$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 9$$
$$-8x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 9$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

La soluzione ottima è $x^* = [0\ 3\ 0\ 0]^T$, avente valore $z^* = 6$. Tale soluzione è una SBA degenere, rispetto all'insieme di indici di base B = {2,3}.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Il corrispondente problema duale è

$$\max \omega(y) = 9y_1 + 9y_2$$
$$s.v.$$
$$2y_1 - 8y_2 \leq 3$$
$$3y_1 + 3y_2 \leq 2$$
$$5y_1 - 4y_2 \leq 4$$
$$5y_1 + 3y_2 \leq 8$$

Per determinare la soluzione ottima duale y^*, si osserva che le condizioni di ortogonalità (7.8) per la coppia primale-duale in esame impongono che la soluzione ottima duale y^* deve soddisfare l'equazione $3y_1 + 3y_2 = 3$, giacché soltanto $x^*_2 > 0$.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Pertanto, si ottiene una sola equazione in due incognite, il che significa che il problema duale ammette infinite soluzioni ottime.

Esse possono essere determinate imponendo, ad esempio, $y^*_1 = k$ (da cui $y^*_2 = 2/3 - k$), e determinando l'intervallo di valori per il parametro k in corrispondenza dei quali sono soddisfatti tutti i vincoli del problema duale per la generica soluzione $y^* = [k, 2/3 - k]^T$, di valore $\omega^* = 6$.

Nel caso in esame, risulterà $k \leq 20/27$.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Se si sceglie k $pari$ proprio all'estremo dell'intervallo (si osservi che, in generale, l'intervallo potrebbe essere anche limitato), si ottiene $y^* = [20/27, -2/27]^T$.

Si può agevolmente verificare che tale soluzione corrisponde alla soluzione complementare di x^* rispetto all'insieme di indici di base B e poteva essere ottenuta più semplicemente imponendo, oltre al soddisfacimento dell'equazione $3y_1 + 3y_2 = 3$, anche che $5y_1 - 4y_2 = 4$, ovvero il soddisfacimento all'uguaglianza del vincolo duale in corrispondenza della variabile di base degenere all'ottimo (x^*_3).

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

A tale soluzione corrisponde una soluzione di base per il problema duale, una volta ridotto in forma standard.

Dell’esistenza di una soluzione siffatta si è certi in virtù del Corollario 6.1.

Proprietà della coppia primale-duale

È importante sottolineare che le condizioni di ortogonalità possono scriversi per ogni coppia primale-duale.

Ad esempio, può risultare utile considerare il caso di problema primale in forma «simmetrica»

$$\min z(x) = c^T x \qquad (7.14)$$

$$s.v.$$

$$Ax \geq b \qquad (7.15)$$

$$x \geq 0 \qquad (7.16)$$

a cui è associato il seguente duale:

$$\max \omega(y) = b^T y \qquad (7.17)$$

$$s.v.$$

$$A^T y \leq c \qquad (7.18)$$

$$y \geq 0 \qquad (7.19)$$

Il Teorema 7.4 in questo caso si modifica nel seguente modo

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.7 (delle condizioni di ortogonalità, caso simmetrico)

Sia $\bar{x} \in R^n$ una soluzione ammissibile del problema primale (7.14)–(7.16) e $\bar{y} \in R^m$ una soluzione ammissibile del problema duale (7.17)–(7.19);

$\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime per I rispettivi problemi se e solo se soddisfano le seguenti condizioni di ortogonalità:

$$(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i)\bar{x}_j = 0,\ j=1,\ldots,n; \qquad (7.20)$$

$$\bar{y}_j(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j - b_i) = 0,\ i=1,\ldots,m. \qquad (7.21)$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.7 (delle condizioni di ortogonalità, caso simmetrico)

<u>Dimostrazione.</u>

Analogamente a quanto visto nel Teorema 7.6, in virtù dell'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ per i rispettivi problemi, le condizioni di ortogonalità (7.20) e (7.21) possono equivalentemente riscriversi in modo compatto come

$$(c^T - \bar{y}^T{}_A)\bar{x} = 0; \qquad (7.22)$$

$$\bar{y}^T(A\bar{x} - b) = 0, \qquad (7.23)$$

dal momento che le (7.20) implicano il soddisfacimento della (7.22) e viceversa, così come le (7.21) implicano il soddisfacimento della (7.23) e viceversa

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.7 (delle condizioni di ortogonalità, caso simmetrico)

(*Condizione necessaria*).

Si supponga che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ siano soluzioni ottime per i rispettivi problemi. Dal teorema di dualità forte si ha che

$$c^T\bar{x} - \bar{y}^T b = 0 \qquad (7.24)$$

Sottraendo e aggiungendo la stessa quantità $\bar{y}^T{}_A\bar{x}$ al primo membro della (7.24) si ottiene

$$c^T\bar{x} - \bar{y}^T A\bar{x} + \bar{y}^T A\bar{x} - \bar{y}^T b = 0$$

ovvero,

$$(c^T - \bar{y}^T A)\bar{x} + \bar{y}^T(A\bar{x} - b) = 0 \qquad (7.25)$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.7 (delle condizioni di ortogonalità, caso simmetrico)

In virtù dell'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ per i rispettivi problemi, si ha che

$$(c^T - \bar{y}^T A)\bar{x} \geq 0$$

e

$$\bar{y}^T (A\bar{x} - b) \geq 0$$

quindi la (7.25) implica che le condizioni di ortogonalità (7.22) e (7.23) siano soddisfatte.

Proprietà della coppia primale-duale

- Teorema 7.7 (delle condizioni di ortogonalità, caso simmetrico)

(*Condizione sufficiente*).

Se le soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soddisfano le condizioni di ortogonalità (7.22) e (7.23), si ha che

$$c^T\bar{x} = \bar{y}^T A\bar{x}$$
$$\bar{y}^T A\bar{x} = \bar{y}^T b$$

da cui

$$c^T\bar{x} = \bar{y}^T b.$$

Dal Corollario 7.1, essendo $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soluzioni ammissibili per i rispettivi problemi, ne segue anche l'ottimalità.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Sia dato il seguente problema (P) di PL:

$$\max z(x) = 2x_1 + 5x_2$$
$$s.v.$$
$$6x_1 + 8x_2 \leq 48$$
$$2x_1 - 4x_2 \geq 10$$
$$3x_1 - 2x_2 \leq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

La soluzione ottima è $x^* = [34/5\ 9/10]^T$, avente valore $z^* = 181/10$.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Il problema duale di (P) si può scrivere equivalentemente come

$$
\begin{gathered}
\min \omega(y) = 48y_1 - 10y_2 + 60y_3 \\
s.v. \\
6y_1 - 2y_2 + 3y_3 \geq 2 \\
8y_1 + 4y_2 - 2y_3 \geq 5 \\
y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{gathered}
$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Le condizioni di ortogonalità per tale coppia primale-duale diventano

$$\begin{cases} (6y_1 - 2y_2 + 3y_3 - 2)x_1 = 0 \\ (8y_1 + 4y_2 - 2y_3 - 5)x_2 = 0 \\ y_1(48 - 6x_1 - 8x_2) = 0 \\ y_2(2x_1 - 4x_2 - 10) = 0 \\ y_3(60 - 3x_1 + 2x_2) = 0 \end{cases}$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Essendo $x^*_1 > 0$, $x^*_2 > 0$ e $3x^*_1 - 2x^*_2 < 60$, soddisfare le condizioni di ortogonalità implica risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 6y1 - 2y2 + 3y3 = 2 \\ 8y1 + 4y2 - 2y3 = 5 \\ y3 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $y^*=[9/20 \ \ 7/20 \ \ 0]^T$, avente valore $\omega^*=181/10$.