1 Conversione numerica

Esercizio 1.1. Effettuare le seguenti conversioni

$$(1056)_{10} = \begin{cases} (?)_2 \\ (?)_8 \\ (?)_{16} \end{cases}$$

Soluzione. Per effettuare il cambiamento di base a partire dalla base 10 è conveniente passare alla base 2 tramite l'algoritmo delle divisioni successive

$$\left.\begin{array}{r|l} 1056 & 0 \\ 528 & 0 \\ 264 & 0 \\ 132 & 0 \\ 66 & 0 \\ 33 & 1 \\ 16 & 0 \\ 8 & 0 \\ 4 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right\} 10000100000$$

Il risultato ottenuto è la rappresentazione in base 2 del numero dato; a partire da questa rappresentazione si può facilmente passare alla conversione in base ottale e in base esadecimale solo raggruppando i bit che compongono la rappresentazione in base 2

Conversione in base ottale

Ricordando che $8 = 2^3$ raggruppiamo i bit della parola per gruppi di al massimo 3 elementi (il raggruppamento più significativo potrebbe averne di meno)

$$\underbrace{10}_{2}\ \underbrace{000}_{0}\ \underbrace{100}_{4}\ \underbrace{000}_{0}$$

Conversione in base esadecimale

Ricordando che $16 = 2^4$ raggruppiamo i bit della parola per gruppi di al massimo 4 elementi (il raggruppamento più significativo potrebbe averne di meno)

$$\underbrace{100}_{4}\underbrace{0010}_{2}\underbrace{0000}_{0}$$

A questo punto, ricapitolando, possiamo scrivere la soluzione dell'esercizio

$$(1056)_{10} = \begin{cases} (10000100000)_2 \\ (2040)_8 \\ (420)_{16} \end{cases}$$

Esercizio 1.2. Effettuare le seguenti conversioni

$$(1456)_{10} = \begin{cases} (?)_2 \\ (?)_8 \\ (?)_{16} \end{cases}$$

Soluzione. Per effettuare il cambiamento di base a partire dalla base 10 è conveniente passare alla base 2 tramite l'algoritmo delle divisioni successive

$$\left.\begin{array}{r|l} 1456 & 0 \\ 728 & 0 \\ 364 & 0 \\ 182 & 0 \\ 91 & 1 \\ 45 & 1 \\ 22 & 0 \\ 11 & 1 \\ 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right\} 10110110000$$

Il risultato ottenuto è la rappresentazione in base 2 del numero dato; a partire da questa rappresentazione si può facilmente passare alla conversione in base ottale e in base esadecimale solo raggruppando i bit che compongono la rappresentazione in base 2

Conversione in base ottale

Ricordando che $8 = 2^3$ raggruppiamo i bit della parola per gruppi di al massimo 3 elementi (il raggruppamento più significativo potrebbe averne di meno)

$$\underbrace{10}_{2}\underbrace{110}_{6}\underbrace{110}_{6}\underbrace{000}_{0}$$

Conversione in base esadecimale

Ricordando che $16 = 2^4$ raggruppiamo i bit della parola per gruppi di al massimo 4 elementi (il raggruppamento più significativo potrebbe averne di meno)

$$\underbrace{101}_{5}\underbrace{1011}_{B}\underbrace{0000}_{0}$$

A questo punto, ricapitolando, possiamo scrivere la soluzione dell'esercizio

$$(1456)_{10} = \begin{cases} (10110110000)_2 \\ (2660)_8 \\ (5B0)_{16} \end{cases}$$

Esercizio 1.3. Effettuare le seguenti conversioni

$$(1F7)_{16} = \begin{cases} (?)_2 \\ (?)_8 \\ (?)_{10} \end{cases}$$

Soluzione. Per convertire un numero dalla base 16 ad altre basi, è conveniente innanzitutto passare alla rappresentazione in base 2; per farlo è sufficiente scrivere le cifre che compongono il numero in base 16 in binario, quindi

$$(1F7)_{16} \Longrightarrow \underbrace{0001}_{1}\underbrace{1111}_{F}\underbrace{0111}_{7} \Longrightarrow (111110111)_2$$

Dalla rappresentazione in base binaria, è immediato passare alla base ottale raggruppando le cifre del numero per gruppi di 3 elementi

$$(111110111)_2 \Longrightarrow \underbrace{111}_{7}\,\underbrace{110}_{6}\,\underbrace{111}_{7} \Longrightarrow (767)_8$$

Per ottenere la rappresentazione in base 10 è necessario usare la notazione posizionale usando uno delle rappresentazioni che già conosciamo, ad esempio la base binaria

$$(111110111)_2 \Longrightarrow \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 2^i \Longrightarrow 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \Longrightarrow (503)_{10}$$

A questo punto, ricapitolando, possiamo scrivere la soluzione dell'esercizio

$$(1F7)_{16} = \begin{cases} (111110111)_2 \\ (767)_8 \\ (503)_{10} \end{cases}$$

Esercizio 1.4. Effettuare le seguenti conversioni

$$(64)_8 = \begin{cases} (?)_2 \\ (?)_{10} \\ (?)_{16} \end{cases}$$

Soluzione. Per convertire un numero dalla base 8 ad altre basi, è conveniente innanzitutto passare alla rappresentazione in base 2; per farlo è sufficiente scrivere le cifre che compongono il numero in base 16 in binario, quindi

$$(64)_8 \Longrightarrow \underbrace{110}_{6}\,\underbrace{100}_{4} \Longrightarrow (110100)_2$$

Dalla rappresentazione in base binaria, è immediato passare alla base esadecimale raggruppando le cifre del numero per gruppi di 4 elementi

$$(110100)_2 \Longrightarrow \underbrace{11}_{3}\,\underbrace{0100}_{4} \Longrightarrow (34)_{16}$$

Per ottenere la rappresentazione in base 10 è necessario usare la notazione posizionale usando uno delle rappresentazioni che già conosciamo, ad esempio la base esadecimale

$$(34)_{16} \Longrightarrow \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 16^i \Longrightarrow 3 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 \Longrightarrow (52)_{10}$$

A questo punto, ricapitolando, possiamo scrivere la soluzione dell'esercizio

$$(64)_8 = \begin{cases} (110100)_2 \\ (52)_{10} \\ (34)_{16} \end{cases}$$

Esercizio 1.5. Effettuare le seguenti conversioni

$$(10100001010)_2 = \begin{cases} (?)_8 \\ (?)_{10} \\ (?)_{16} \end{cases}$$

Soluzione. A partire dalla rappresentazione binaria si può facilmente passare alla conversione in base ottale e in base esadecimale solo raggruppando le cifre che compongono il numero

Conversione in base ottale

Ricordando che $8 = 2^3$ raggruppiamo i bit della parola per gruppi di al massimo 3 elementi (il raggruppamento più significativo potrebbe averne di meno)

$$\underbrace{10}_{2}\underbrace{100}_{4}\underbrace{001}_{1}\underbrace{010}_{2}$$

Conversione in base esadecimale

Ricordando che $16 = 2^4$ raggruppiamo i bit della parola per gruppi di al massimo 4 elementi (il raggruppamento più significativo potrebbe averne di meno)

$$\underbrace{101}_{5}\underbrace{0000}_{0}\underbrace{1010}_{A}$$

Per ottenere la rappresentazione in base 10 è necessario usare la notazione posizionale usando uno delle rappresentazioni che già conosciamo, ad esempio la base ottale

$$(2412)_8 \Longrightarrow \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 8^i \Longrightarrow 2 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 \Longrightarrow (1290)_{10}$$

A questo punto, ricapitolando, possiamo scrivere la soluzione dell'esercizio

$$(10100001010)_2 = \begin{cases} (2412)_8 \\ (1290)_{10} \\ (50A)_{16} \end{cases}$$

2 Algebra booleana & circuiti logici

Esercizio 2.1. Minimizzare coi teoremi dell'algebra di Boole la seguente funzione logica e disegnare il circuito corrispondente

$$Y = \overline{A} \cdot (A + B) + \overline{C} + B \cdot C$$

Soluzione.
La risoluzione dell'esercizio può essere fatta grazie a semplici passaggi matematici. Come prima cosa, svolgiamo il prodotto $\overline{A} \cdot (A + B)$, ottenendo così $\overline{A} \cdot A + \overline{A} \cdot B$

$$Y = \overline{A} \cdot (A + B) + \overline{C} + B \cdot C \Longrightarrow Y = \overline{A} \cdot A + \overline{A} \cdot B + \overline{C} + B \cdot C$$

Come possiamo notare subito, l'espressione del tipo $\overline{A} \cdot A = 0$ per la *"legge di dualità"*; quindi otteniamo

$$Y = \overline{A} \cdot A + \overline{A} \cdot B + \overline{C} + B \cdot C \Longrightarrow Y = \overline{A} \cdot B + \overline{C} + B \cdot C$$

A questo punto, è possibile applicare il *"II teorema dell'assorbimento"* che semplifica l'espressione $\left[\overline{C} + B \cdot C\right] \Longrightarrow \left[\overline{C} + B\right]$, facendoci ottenere quindi

$$Y = \overline{A} \cdot B + \left[\overline{C} + B \cdot C\right] \Longrightarrow Y = \overline{A} \cdot B + \overline{C} + B$$

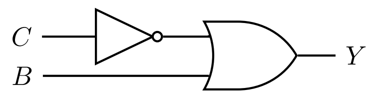
Raccogliamo ora la variabile aleatoria B

$$Y = \overline{A} \cdot B + \overline{C} + B \Longrightarrow Y = B \cdot \left(\overline{A} + 1\right) + \overline{C}$$

L'espressione $\left(\overline{A} + 1\right) = 1$ per la *legge di annullamento*, pertanto possiamo riscrivere la funzione logica come

$$Y = B \cdot \left(\overline{A} + 1\right) + \overline{C} \Longrightarrow Y = B + \overline{C}$$

Il circuito logico corrispondente viene mostrato nella figura sottostante



Esercizio 2.2. Minimizzare coi teoremi di De Morgan la seguente funzione logica e disegnare il circuito corrispondente

$$Y = \overline{A + A \cdot \overline{B} + CD}$$

Soluzione.
La risoluzione dell'esercizio può essere fatta grazie a semplici passaggi matematici. Come prima cosa, raccogliamo la variabile A all'interno dell'espressione ottenendo $A + A \cdot \overline{B} \Longrightarrow A\left(1 + \cdot\overline{B}\right)$, quindi

$$Y = \overline{A + A \cdot \overline{B} + CD} \Longrightarrow Y = \overline{A\left(1 + \cdot\overline{B}\right) + CD}$$

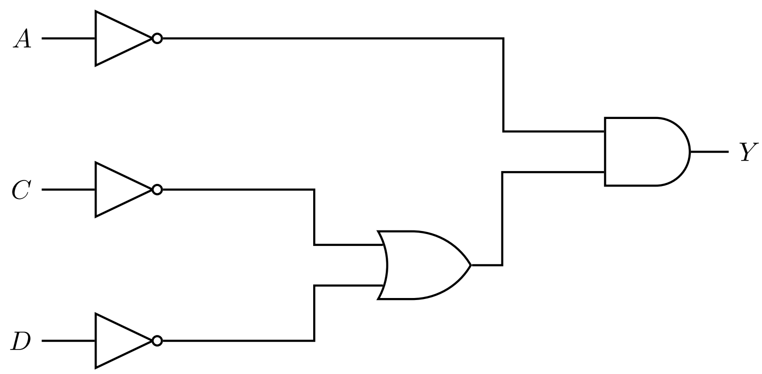
Ricordando che per teorema l'espressione $\left(1 + \cdot\overline{B}\right) = 1$ otteniamo

$$Y = \overline{A\left(1 + \cdot\overline{B}\right) + CD} \Longrightarrow Y = \overline{A + CD}$$

In questo stadio possiamo applicare De Morgan ottenendo così l'espressione minima finale

$$Y = \overline{A + CD} \Longrightarrow \overline{A} \cdot \left(\overline{C} + \overline{D}\right)$$

Il circuito logico corrispondente viene mostrato nella figura sottostante



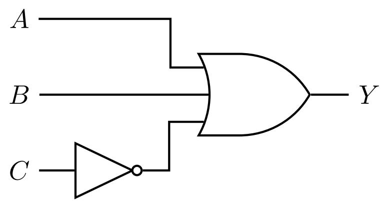
Esercizio 2.3. Minimizzare coi teoremi di De Morgan la seguente funzione logica e disegnare il circuito corrispondente

$$Y = \overline{\overline{(A + B)} \cdot C}$$

Soluzione.
La risoluzione dell'esercizio può essere fatta grazie unicamente al teorema di De Morgan, prima trasformando $\overline{(A + B)} \Longrightarrow \overline{A} \cdot \overline{B}$ e infine sul resto dell'espressione

$$Y = \overline{\overline{(A + B)} \cdot C} \Longrightarrow \overline{\left(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C\right)} \Longrightarrow \left(A + B + \overline{C}\right)$$

Il circuito logico corrispondente viene mostrato nella figura sottostante



Esempio 2.4. Minimizzare coi teoremi dell'algebra di Boole la seguente funzione logica e disegnare il circuito corrispondente

$$Y = \overline{B} \cdot \overline{C} + AB\overline{C}$$

Soluzione.
Per risolvere l'esercizio, per prima cosa è necessario raccogliere la variabile $\overline{C}$

$$Y = \overline{B} \cdot \overline{C} + AB\overline{C} \Longrightarrow Y = \overline{C} \cdot \left(\overline{B} + AB\right)$$

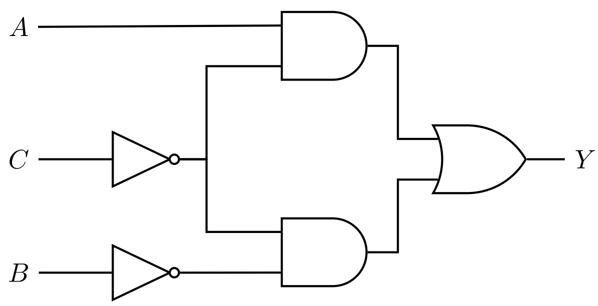
a questo punto possiamo semplificare il termine $\left(\overline{B} + AB\right)$ tramite il secondo teorema dell'assorbimento, in questo modo $\left(\overline{B} + AB\right) \Longrightarrow \left(\overline{B} + A\right)$

$$Y = \overline{C} \cdot \left(\overline{B} + AB\right) \Longrightarrow Y = \overline{C} \cdot \left(\overline{B} + A\right)$$

In ultimo, svolgiamo il prodotto e otteniamo quindi la funzione minima

$$Y = \overline{C} \cdot \left(\overline{B} + A\right) \Longrightarrow Y = \overline{C} \cdot \overline{B} + \overline{C} \cdot A$$

Il circuito logico corrispondente viene mostrato nella figura sottostante



Esercizio 2.5. Minimizzare coi teoremi dell'algebra di Boole la seguente funzione logica e disegnare il circuito corrispondente

$$Y = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot \overline{C}$$

Soluzione.
La risoluzione dell'esercizio è molto semplice ed sono sufficienti pochi passaggi matematici. Innanzitutto, raccogliamo il termine $\overline{C}$

$$Y = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot \overline{C} \Longrightarrow Y = \overline{C} \cdot \left(\overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + A \cdot B\right)$$

per poi raccogliere parzialmente $\left[\overline{B} + B\right]$, ottenend quindi

$$Y = \overline{C} \cdot \left(\overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + A \cdot B\right) \Longrightarrow Y = \overline{C} \cdot \left[\overline{A} \cdot \left(\overline{B} + B\right) + A \cdot \left(\overline{B} + B\right)\right]$$

Ricordiamo che, per il teorema dei complementi $\left[\overline{B} + B\right] = 1$, possiamo semplificare ulteriormente l'espressione

$$Y = \overline{C} \cdot \left[\overline{A} \cdot \left(\overline{B} + B\right) + A \cdot \left(\overline{B} + B\right)\right] \Longrightarrow Y = \overline{C} \cdot \left[\overline{A} + A\right]$$

Pleonastico notare ora che anche $\left[\overline{A} + A\right] = 1$ e che quindi l'espressione si può ridorre banalmente in

$$Y = \overline{C} \cdot \left[\overline{A} + A\right] \Longrightarrow Y = \overline{C}$$