

Connettività dei grafi geometrici casuali

Autori: P. Crescenzi, M. Di Ianni, M. Lalli

In questa dispensa viene studiato il problema di individuare il minimo raggio di trasmissione che garantisce la connessione di una rete wireless ad hoc omogenea (ossia, in cui tutti i nodi trasmettono con la stessa potenza) stazionaria. In particolare, verranno presentate una delimitazione superiore ed una inferiore a tale minimo.

La dispensa è organizzata come di seguito descritto. Nel Paragrafo 1.1 saranno introdotte, brevemente, le reti wireless ad-hoc e saranno descritti, informalmente, i risultati oggetto di analisi in questa dispensa. I Paragrafi 1.2 e 1.3 sono dedicati alle definizioni formali, rispettivamente, del modello di rete cui faremo riferimento nel resto della dispensa e del problema MTR. Nel Paragrafo 1.4 saranno introdotti gli strumenti probabilistici sui quali sono costruite le dimostrazioni della validità delle delimitazioni inferiore e superiore al valore del minimo raggio di trasmissione, oggetto, queste ultime del Paragrafo 1.5.

1.1 Introduzione

Le *reti wireless ad hoc* sono costituite da nodi che dispongono di ricetrasmittitori wireless mediante i quali realizzano comunicazioni peer-to-peer. In una rete wireless ad hoc, tipicamente, avvengono comunicazioni *multi-hop*, ossia, due nodi i cui trasmettitori non sono in grado di connettersi l'uno con l'altro (a causa dell'elevata distanza dei nodi, o della presenza di ostacoli, o per qualunque altra causa) possono comunicare mediante una serie di nodi intermedi che si inoltrano l'uno con l'altro il messaggio da comunicare finché esso raggiunge il nodo destinazione.

Le *reti di sensori* sono una particolare classe di reti wireless ad hoc in cui i nodi, ciascuno contenente un sensore, sono dotati di una batteria di capacità particolarmente limitata, di un ricetrasmittitore wireless, e di un semplice processore. I sensori raccolgono i dati di interesse (ad esempio, temperatura, pressione, composizione del suolo, ecc...), e li trasmettono (eventualmente compressi e / o aggregati con quelli dei nodi vicini) agli altri nodi. In questo modo, ogni nodo della rete acquisisce una visione globale della zona monitorata, che può essere accessibile ad un utente esterno collegato alla rete attraverso uno o più nodi gateway (come si vede in Figura 1.1). Le potenziali applicazioni delle reti di sensori abbondano: si pensi, ad esempio, al monitoraggio della temperatura dell'oceano per rendere possibili previsioni meteo più precise, all'individuazione di incendi boschivi che si verificano in aree remote, e alla rapida diffusione di informazioni sul traffico.

Si osservi che, affinché le informazioni possano circolare ovunque nella rete e raggiungere anche i nodi più remoti,

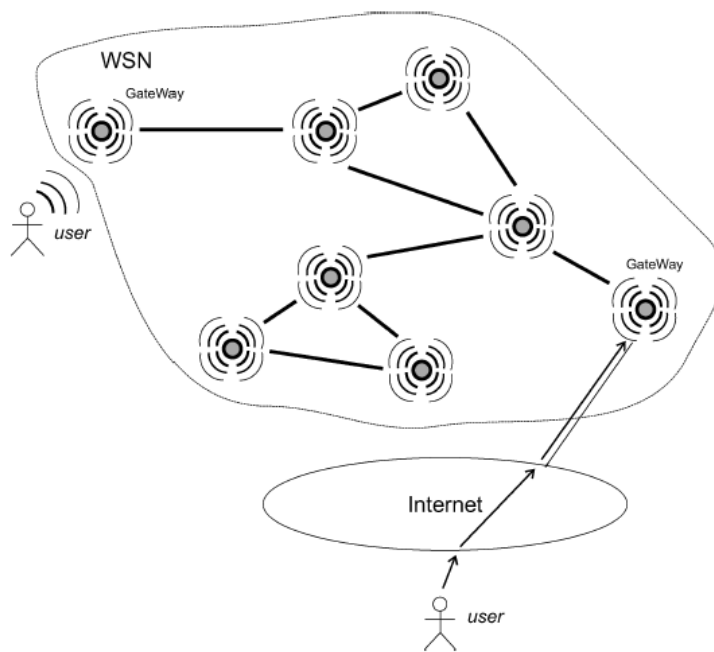


Figura 1.1: Esempio di rete di sensori

è necessario che la rete sia *connessa*: per ogni coppia di nodi a e b della rete deve esistere una sequenza di nodi u_1, u_2, \dots, u_k tale che a può trasmettere direttamente (ossia, in un hop) ad u_1 che può trasmettere direttamente ad u_2, \dots , che può trasmettere direttamente ad u_k che può trasmettere direttamente a b . In questa dispensa, consideriamo la seguente fondamentale questione: quali sono le condizioni necessarie al fine di garantire che una rete di sensori sia connessa? Tale questione viene studiata in termini probabilistici, cioè, nel seguito valuteremo, sotto opportune ipotesi, la probabilità che una rete sia connessa.

Innanzitutto, assumeremo che n nodi siano distribuiti uniformemente a caso una regione limitata che, senza perdita di generalità, considereremo essere il quadrato unitario $Q = [0, 1]^2$. Questa eventualità si verifica, ad esempio, quando i sensori sono “lanciati” da un veicolo in movimento, come un aeroplano. Assumeremo, inoltre, che tutti i nodi trasmettano con la stessa potenza e che, pertanto, esista un valore r , detto *raggio di trasmissione*, tale che due nodi possono comunicare direttamente solo se la loro distanza è al più r . In queste ipotesi, ci porremo come obiettivo quello di determinare il valore minimo di r , che genera grafi di comunicazione che sono connessi con alta probabilità.

Minimizzare la lunghezza del raggio di trasmissione è una questione collegata a considerazioni di tipo energetico. Infatti, l'energia necessaria ad effettuare una trasmissione è proporzionale al quadrato (o, a seconda delle condizioni ambientali, ad una potenza superiore) del raggio di trasmissione. Pertanto, minimizzare il raggio di trasmissione equivale a minimizzare il consumo di energia. Osserviamo che la minimizzazione del consumo energetico, pur essendo un fattore rilevante nel progetto di reti wireless ad hoc in generale, risulta essenziale per la sopravvivenza di reti di sensori. Infatti, i sensori sono in genere alimentati a batteria e la loro dislocazione rende spesso la sostituzione o la ricarica delle batterie molto difficile, se non impossibile. Per questa ragione, la riduzione dei consumi energetici appare il modo più praticabile per estendere la durata della vita della rete.

1.2 Formalizzazione del modello di rete

In quanto segue, considereremo sempre la rete costituita da n nodi, dove ciascun nodo è un punto dello spazio euclideo d -dimensionale. Il parametro d è detto *dimensione* della rete, mentre n è detto *ordine* della rete. Indicheremo, inoltre con N l'insieme dei nodi della rete ($|N| = n$).

Definizione 1.1(Nodo e rete stazionari): *Un nodo $i \in N$ si dice stazionario se la sua collocazione fisica non varia con il tempo.*

Se tutti i nodi sono stazionari, la rete si dice essere stazionaria.

Definizione 1.2(Configurazione di una rete stazionaria): La configurazione di una rete wireless ad hoc stazionaria d -dimensionale è rappresentata da una coppia $M_d = (N, P)$, dove N è l'insieme di nodi e $P : N \rightarrow [0, 1]^d$ è la funzione di posizionamento.

La funzione di posizionamento assegna a ogni elemento di N le coordinate di un punto contenuto nel cubo d -dimensionale di lato 1, rappresentando in tal modo la posizione fisica del nodo. La scelta di limitare le posizioni fisiche dei nodi alla ristretta regione di \mathbb{R}^d costituita dal cubo $[0, 1]^d$, è, a meno di traslazioni e normalizzazioni, senza perdita di generalità e facilita l'analisi probabilistica affrontata in questa dispensa. In particolare, nel resto di questa dispensa, considereremo sempre nodi posizionati nel piano e, quindi, assumeremo sempre $d = 2$.

Definizione 1.3(Assegnazione di raggio): Una assegnazione di raggio per una rete d -dimensionale $M_d = (N, P)$, è una funzione $RA : N \rightarrow (0, r_{max}]$ che assegna ad ogni elemento di N un valore in $(0, r_{max}]$; per ogni nodo $u \in N$, il valore $RA(u)$ rappresenta il raggio di trasmissione di u .

Il parametro r_{max} è il massimo raggio di trasmissione dei nodi della rete e dipende dalle caratteristiche dei ricetrasmittitori. L'assunzione che faremo in questa dispensa è che tutti i nodi siano dotati di ricetrasmittitori aventi le stesse caratteristiche, ossia, che il valore r_{max} sia lo stesso per tutti i nodi della rete. Una assegnazione di raggio in cui tutti i nodi hanno lo stesso raggio di trasmissione r , per qualche $0 < r \leq r_{max}$ è chiamata *assegnazione omogenea*:

$$RA(u) = r \quad \forall u \text{ con } r \in (0, r_{max}]$$

Definizione 1.4(Grafo di comunicazione): Data una configurazione $M_d = (N, P)$ e una assegnazione $RA : N \rightarrow \mathbb{R}^+$ di raggi di trasmissione agli elementi di N , il grafo di comunicazione indotto da RA su M_d , è definito come il grafo $G = (N, E)$, dove $(i, j) \in E$ se e solo se $RA(i) \geq d(P(i), P(j))$, in cui $(d(P(i), P(j)))$ denota la distanza dei punti i e j . In altre parole, l'arco (i, j) esiste se e solo se i nodi i e j sono a una distanza non superiore a $RA(i)$.

Il grafo di comunicazione, come definito qui, coincide con il modello di grafo a punto (vedere Figura 1.2). Se, inoltre la funzione RA è costante (ossia, se assegna lo stesso raggio di trasmissione a tutti i nodi della rete) esso coincide con il modello *Unit Disk Graph (UDG)*.

Infine, se le posizioni dei nodi sono scelte in base a qualche distribuzione di probabilità, il modello UDG coincide con quello di *Grafo Geometrico Casuale*, che è una generalizzazione della nozione di *Grafo Casuale*.

La principale debolezza del modello UDG (o di grafo geometrico casuale) nel modellare una rete reale è l'assunzione che l'area di copertura sia un cerchio perfetto. Questa ipotesi può essere considerata realistica in ambienti liberi da ostacoli, ma risulta debole in scenari urbani interni o dove la presenza di oggetti, muri, edifici, e così via, rende l'area di copertura radio estremamente irregolare. Inoltre, l'area e la forma della copertura radio sono influenzate dalle condizioni meteorologiche e dalla interferenza con le infrastrutture preesistenti. Comprendendo tutti questi dettagli nella rete, il modello corrispondente risulterebbe estremamente complicato, ostacolando la derivazione di risultati analitici significativi e sufficientemente generali. Per questo motivo, il modello UDG, anche se molto semplicistico, è ampiamente utilizzato nell'analisi delle reti ad hoc.

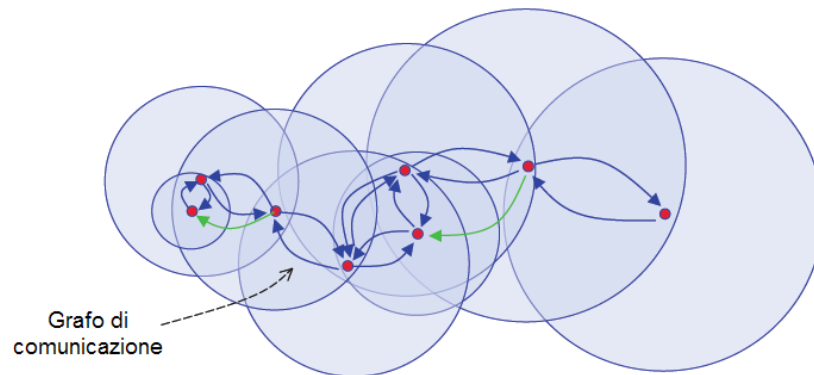


Figura 1.2: Esempio di grafo a punto

1.3 Il problema del minimo raggio di trasmissione

Abbiamo già sottolineato la criticità della questione del risparmio energetico in una rete di sensori, osservando che l'energia consumata da un nodo per comunicare è direttamente dipendente dal suo raggio di trasmissione. Allo stesso tempo, assegnare ai sensori potenze trasmissive troppo basse impedirebbe la loro comunicazione, rendendo, così, la rete poco utile.

Nella fase di progettazione di una rete di sensori, l'assegnazione di potenza deve, dunque, tenere conto di due obiettivi contrastanti:

- 1) garantire una soddisfacente durata della rete facendo in modo che le batterie dei nodi non si esauriscano troppo in fretta;
- 2) garantire un livello di connettività sufficiente a soddisfare tutte le esigenze di comunicazione della rete.

Osserviamo che, conoscendo a priori la dislocazione dei nodi della rete, potremmo calcolare una assegnazione di potenza ad-hoc per ogni sensore che soddisfi i due obiettivi appena elencati: in effetti, questo sarà oggetto di studio in una successiva dispensa che si riferisce a reti wireless ad-hoc costituite da dispositivi più complessi dei sensori. Tuttavia, i sensori destinati a costituire una rete vengono spesso posizionati nell'area da monitorare in maniera casuale e, comunque, imprevedibile al momento in cui viene stabilita la loro potenza trasmissiva. Si pensi, ad esempio, al caso in cui i sensori vengono lanciati da un velivolo sulla zona da monitorare. D'altra parte, in molte situazioni, la regolazione dinamica del raggio di trasmissione del nodo non è fattibile. Infatti, ricetrasmittitori economici potrebbero non permettere di regolare il raggio di trasmissione secondo necessità. Per tutte queste ragioni, l'assegnazione dello stesso raggio minimo di trasmissione a tutti i nodi risulta essere, in molti scenari, l'unica scelta ragionevole per mantenere la capacità operativa della rete, garantendone la connessione, e ridurre allo stesso tempo il consumo di energia.

Siamo, ora, pronti a definire il problema che ci proponiamo di studiare in questa dispensa, noto in letteratura come il problema di determinare l'intervallo critico per la connettività:

Definizione 1.5(Problema del Minimo Raggio di Trasmissione (MTR)): Dati n nodi distribuiti casualmente e in modo uniforme in $[0, 1]^2$ (il quadrato unitario), quale è il valore minimo r^* tale che l'assegnazione omogenea di raggio di trasmissione r^* a tutti i nodi induce un grafo di comunicazione che risulti connesso con alta probabilità?

La soluzione del problema MTR dipende dalle informazioni disponibili circa il posizionamento fisico dei nodi. Se la collocazione dei nodi è nota in anticipo, il valore minimo del raggio di trasmissione che garantisce la connessione può essere facilmente determinato: infatti, esso è l'arco più lungo del Minimum Spanning Tree. Sfortunatamente, come abbiamo già visto, in molti scenari realistici di reti ad hoc, il posizionamento dei nodi non può essere conosciuto in anticipo.

Se le posizioni dei nodi non sono note a priori, in $Q = [0, 1]^d$, il valore del raggio di trasmissione che garantisce la connessione in tutti i casi possibili è $r \approx l\sqrt{d}$ ($r \approx \sqrt{2}$ con $Q = [0, 1]^2$), in quanto, con questa scelta, ogni nodo può comunicare direttamente con ogni altro nodo della rete. Tuttavia, in questo modo, non viene in alcun modo utilizzata la caratteristica di questo tipo di rete di essere multi-hop. Per questo motivo, studieremo il problema MTR utilizzando un modello probabilistico ossia, in base al presupposto che i nodi siano distribuiti indipendentemente e uniformemente a caso nella regione di distribuzione, cercheremo un valore del raggio di trasmissione (inferiore a $l\sqrt{d}$) che garantisca la connessione della rete non con certezza ma, piuttosto, con *buona probabilità*. Più precisamente, in quanto segue, l'obiettivo sarà quello di caratterizzare il valore minimo del raggio di trasmissione rispetto al quale la rete risulta connessa con alta probabilità, cioè, con una probabilità che converge ad 1 molto velocemente quando il numero di nodi aumenta: data una rete di n nodi, con la locuzione *alta probabilità* intenderemo probabilità pari a $1 - \frac{1}{n^c}$, per qualche costante $c > 0$.

Intuitivamente, aumentando il numero di nodi collocati nel quadrato unitario, i nodi tendono ad essere più vicini, ossia, aumenta la probabilità che diminuisca la distanza massima fra un nodo e il più vicino dei suoi vicini. In effetti, è possibile mostrare sperimentalmente che, fissata la regione in cui sono collocati i nodi (nel nostro caso, il quadrato unitario), la misura del minimo raggio di trasmissione che garantisce la connessione della rete dipende dal numero n dei nodi della rete: all'aumentare di n , la misura del raggio di trasmissione necessario a garantire una data probabilità di connessione diminuisce. In Figura 1.3, è mostrato come varia la probabilità di connessione di una rete al variare del raggio r .

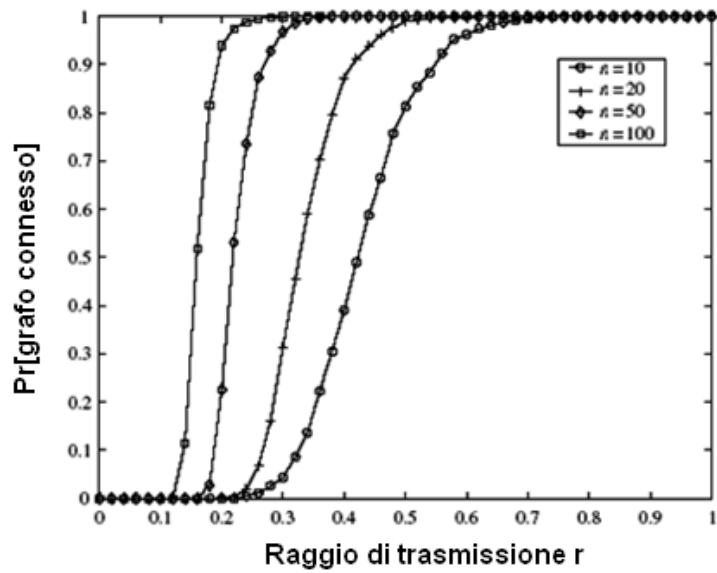


Figura 1.3: Probabilità di connessione per un grafo geometrico casuale in funzione del raggio di trasmissione, fissato il numero di nodi

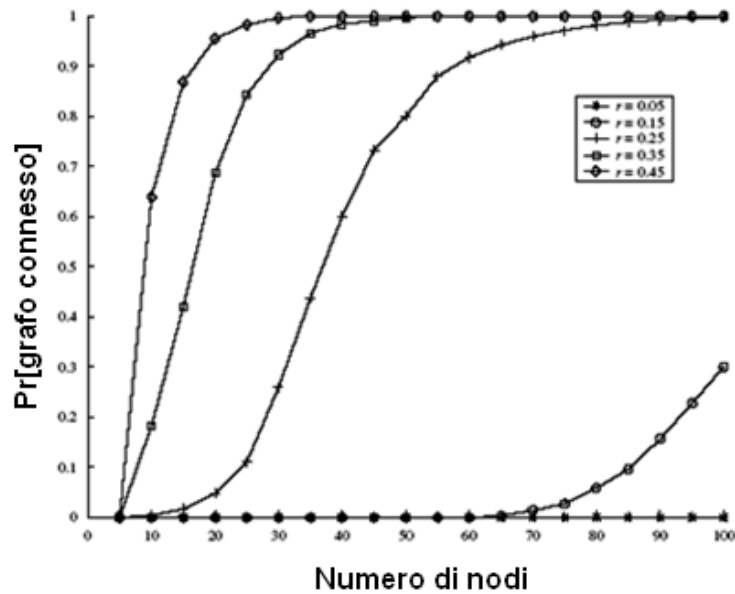


Figura 1.4: Probabilità di connessione per un grafo geometrico casuale in funzione del numero dei nodi in una area unitaria, fissato il raggio di trasmissione

Possiamo anche pensare ad una formulazione duale del problema MTR in cui l'interesse è focalizzato sul numero dei nodi: fissato un valore \bar{r} per il raggio di trasmissione, trovare il numero minimo di nodi che garantisce la connessione della rete con alta probabilità. Questa formulazione è rilevante in molti problemi di dimensionamento che sorgono nella progettazione di reti wireless ad hoc. La Figura 1.4, mostra la probabilità che la rete sia connessa rispetto al numero totale di nodi, distribuiti in un'area unitaria, per diversi valori di un fissato raggio di trasmissione. Comunque, in quanto segue, non ci occuperemo di questa variante del problema MTR, concentrandoci, invece, sulla definizione presentata all'inizio di questo sottoparagrafo.

1.4 Gli strumenti probabilistici

I risultati analitici presentati in questa dispensa sono basati su un approccio probabilistico. In questa sezione, vengono presentati gli strumenti necessari per derivare tali risultati.

La principale difficoltà che sorge nell'analisi probabilistica di reti wireless ad hoc è che la ben consolidata teoria dei grafi casuali non può essere utilizzata. Infatti, un'importante assunzione in questo modello è che le probabilità dell'esistenza di archi nel grafo sono indipendenti, ossia che l'esistenza di un arco *non dipende* dall'esistenza di alcun altro arco. Ciò non è vero nel caso delle reti wireless ad hoc. Per esempio, consideriamo tre nodi u, v, w tali che $d(u, v) < d(u, w)$: se esiste un arco da u a w , allora deve esistere anche un arco da u a v . Quindi, la probabilità dell'esistenza degli archi (u, v) e (u, w) sono correlate.

Al fine di superare questo problema, venne introdotto il modello di rete casuale (*Random Network*) come una generalizzazione del modello di grafo uniforme casuale, a sua volta basato sul modello dei *grafi geometrici casuali* (*Geometric Random Graph, GRG*).

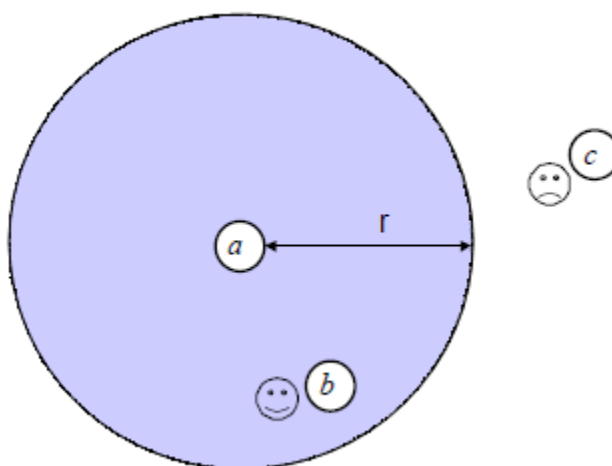


Figura 1.5: Modellizzazione del raggio di trasmissione

1.4.1 Grafi geometrici casuali

Nella teoria dei grafi, un grafo geometrico casuale è un grafo casuale non orientato inserito in una regione limitata di piano. Un grafo geometrico casuale, $G^d(n, r)$, viene costruito in accordo alle regole seguenti:

- n nodi sono collocati a caso, in modo uniforme e indipendentemente gli uni dagli altri, all'interno di un quadrato $l \times l$ (o, senza perdita di generalità, nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$);
- ogni nodo ha un uguale raggio di trasmissione (raggio di trasmissione omogeneo) r ;
- ogni coppia di nodi è collegata da un arco se la loro distanza euclidea è minore o uguale a r . Per fare un esempio, come si vede nella Figura 1.5, il nodo a può comunicare direttamente con il nodo b (infatti, $|x_a - x_b| < r$), ma non può raggiungere il nodo c .

Il grafo $G^2(n, r)$ sarà il modello di riferimento di questa dispensa. Osserviamo che un grafo geometrico casuale è un *evento aleatorio*.

1.4.2 Variabili aleatorie, Valore atteso e Varianza

Variabile aleatoria

Il calcolo delle probabilità è quella parte della matematica che ha per oggetto la misura dell'incertezza. Quando non sappiamo quale sarà l'esito di un certo evento, parliamo di *evento aleatorio*. Un esempio di evento aleatorio potrebbe essere: "l'estrazione del primo numero sulla ruota di Roma". Ad un evento aleatorio è spesso associata una *variabile aleatoria*, ossia, una funzione dall'insieme delle occorrenze di un evento all'insieme dei suoi possibili esiti: ad esempio, possiamo indicare con X_R la variabile aleatoria che indica il primo numero estratto sulla ruota di Roma.

Capita spesso che studiando un evento aleatorio si sia più interessati a una qualche funzione dei possibili esiti che agli esiti stessi. Per esempio, lanciando due dadi siamo spesso interessati alla somma dei valori dei dadi, piuttosto che ai singoli valori che i dadi hanno mostrato. Specificatamente, potremmo essere interessati a sapere se si sia realizzato 7 come somma dei due dadi, piuttosto che sapere quale tra i valori (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) si sia effettivamente verificato. Analogamente, lanciando una moneta possiamo essere interessati al numero totale di teste che sono uscite, piuttosto che alle esatte sequenze di testa e croce che si possono essere verificate. Tutte queste quantità d'interesse, o più precisamente, queste funzioni definite sullo spazio campione, sono proprio variabili aleatorie.

Lo *spettro* di una variabile aleatoria X è l'insieme dei valori che la variabile X può assumere. Una variabile aleatoria è *discreta* se il suo spettro è finito o numerabile; se lo spettro di una variabile aleatoria è continuo, essa si dice *continua*. Se indichiamo con $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ lo spettro di una variabile aleatoria discreta X (nell'esempio, la somma dei numeri risultanti dal lancio di due dadi), con $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ gli eventi elementari che soggiacciono alla variabile aleatoria X (ancora nell'esempio, c_1 potrebbe essere l'evento "sul primo dado è uscito 1 e sul secondo dado è uscito 2"), e con $\varphi : \{c_1, \dots, c_k\} \rightarrow \{x_0, \dots, x_n\}$ la funzione che associa agli eventi elementari i valori della variabile X (nell'esempio, $\varphi(c_1) = 3$), nel caso in cui una variabile aleatoria sia vista in funzione dei suoi eventi elementari, abbiamo:

$$\forall j = 0, \dots, n, P(X = x_j) = \sum_{\varphi(c_i) = x_j} P(c_i)$$

valutiamo, cioè, la variabile mediante una valutazione di tutti i casi elementari dell'evento considerato.

In realtà, si conosce probabilisticamente una variabile aleatoria (non necessariamente discreta) X quando, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è nota la probabilità

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

detta *funzione di ripartizione* o *distribuzione di probabilità* di X . La funzione di distribuzione rappresenta, per ogni valore di x , la probabilità che la variabile aleatoria sia minore o uguale a x .

Possiamo classificare la funzione di ripartizione in base alla cardinalità dello spettro di una generica variabile aleatoria X . In particolare, F_X è una *distribuzione discreta* se la variabile aleatoria X è discreta. In generale, nel caso delle distribuzioni discrete, possiamo scrivere:

$$F_X(x) = \sum_{a \leq x} p(a)$$

dove $p(a) = P(X = a)$ è la *densità discreta* di X . La densità discreta $p(a)$ è positiva per non più di un'infinità al più numerabile di valori di a . Quindi, se X assume i valori x_1, x_2, \dots , allora

$$\begin{aligned} p(x_i) &\geq 0 & i = 1, 2, \dots \\ p(x) &= 0 & \text{altrimenti} \end{aligned}$$

Poiché X deve assumere almeno uno dei valori x_i , abbiamo che

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

Infine, se X è una variabile aleatoria discreta che assume i valori x_1, x_2, x_3, \dots , dove $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$, allora la sua funzione di distribuzione F_X è costante a tratti. Ci significa che il valore di F_X è costante negli intervalli $[x_{i-1}, x_i)$ e poi ha un salto di ampiezza pari a $p(x_i)$ in x_i .

Come già accennato, vi sono variabili aleatorie il cui insieme dei valori è non numerabile. Sia X una variabile aleatoria di questo tipo. Allora, X è una *variabile aleatoria continua* se esiste una funzione non negativa f definita per ogni numero reale $x \in (-\infty, \infty)$, tale che, per ogni sottoinsieme B di numeri reali,

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx.$$

La funzione f è chiamata *funzione densità* della variabile aleatoria X . La formula afferma che la probabilità che X sia in B si ottiene integrando la densità sull'insieme B . Dato che necessariamente X assume qualche valore, f deve soddisfare

$$1 = P(X \in (-\infty, \infty)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Valore atteso di una variabile aleatoria discreta

Se X è una variabile aleatoria discreta con densità discreta $p(x)$ e x_1, \dots, x_n è il suo spettro, il *valore atteso* di X , che si denota con $E[X]$, è la media pesata di tutti i possibili valori che X può assumere, ognuno pesato con la probabilità che X lo assuma. Formalmente, il valore atteso di X è definito da

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$$

Infatti, poiché $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$, è possibile omettere il denominatore della media.

Il valore atteso è un operatore lineare: per ogni variabile aleatoria X e per ogni coppia di numeri reali a e b si ha

$$E[aX + b] = aE[X] + b.$$

Questa proprietà è facilmente dimostrabile: ad esempio, nel caso di una variabile aleatoria discreta,

$$E[aX + b] = \sum_{i=1}^{\infty} (ax_i + b)P(X = x_i) = a \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) + b \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = aE[X] + b.$$

La linearità del valore atteso implica che, date due variabili aleatorie qualsiasi X e Y (non necessariamente indipendenti), vale che $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$. Infatti,

$$\begin{aligned} E[X + Y] &= \sum_j \sum_k (x_j + y_k) P(X = x_j \wedge Y = y_k) \\ &= \sum_j x_j \sum_k P(X = x_j \wedge Y = y_k) + \sum_k y_k \sum_j P(X = x_j \wedge Y = y_k) \\ &= \sum_j x_j P(X = x_j) + \sum_k y_k P(Y = y_k) \\ &= E[X] + E[Y]. \end{aligned}$$

Questa proprietà non vale per il prodotto: in generale, $E[XY]$ diverso da $E[X]E[Y]$. Solo quando X e Y sono due variabili indipendenti¹, è vero che $E[XY] = E[X]E[Y]$:

Teorema 1.1: *Il valore atteso del prodotto di variabili indipendenti è uguale al prodotto dei valori attesi delle singole variabili. Se X e Y sono due variabili indipendenti, allora:*

$$E[XY] = E[X]E[Y].$$

¹Due variabili aleatorie sono dette indipendenti qualora la conoscenza dei valori assunti dall'una non influenzi in alcun modo la previsione sui valori che saranno assunti dall'altra.

Dimostrazione: Siano X e Y due variabili indipendenti, per definizione di valore atteso sappiamo che

$$\begin{aligned}
 E[XY] &= \sum_j \sum_k x_j y_k P(X = x_j \wedge Y = y_k) \\
 &= \sum_j \sum_k x_j y_k P(X = x_j) P(Y = y_k) \quad (\text{in virt\`u dell'indipendenza di } X \text{ e } Y) \\
 &= \sum_j x_j P(X = x_j) \sum_k y_k P(Y = y_k) \\
 &= E[X]E[Y]
 \end{aligned}$$

□

Varianza di una variabile aleatoria discreta

Sebbene $E[X]$ fornisca la media pesata di tutti i possibili valori di X , esso non fornisce alcuna informazione riguardo alla variabilit\`a, o dispersione, di questi valori. Poich\`e \`e ragionevole aspettarsi che X assuma valori disposti attorno al suo valore atteso $E[X]$, appare naturale chiedersi quanto tali valori siano, mediamente, distanti da esso. Chiariamo questo concetto con un esempio.

Esempio. Sia X la variabile aleatoria il cui spettro \`e l'insieme di valori $\{1, \frac{11}{10}, \frac{12}{10}, \frac{98}{10}, \frac{99}{10}, 10\}$ assunti con uguale probabilit\`a, pari ad $\frac{1}{6}$. Allora, $E(X) = \frac{11}{2}$.

Sia Y la variabile aleatoria il cui spettro \`e l'insieme di valori $\{5, \frac{11}{2}, 6\}$ assunti con uguale probabilit\`a, pari ad $\frac{1}{3}$. Allora, $E(Y) = \frac{11}{2}$.

Dunque, X ed Y hanno uguale valore atteso, ma il loro comportamento \`e sostanzialmente differente: mentre qualunque valore assunto da X \`e significativamente distante dal suo valore atteso, i valori assunti da Y sono tutti in prossimit\`a di $E(Y)$.

L'esempio precedente mostra come sia opportuno considerare per una variabile aleatoria X , oltre al suo valore atteso, anche la sua possibile discordanza dal esso. A questo scopo, viene studiata la variabile aleatoria $|X - E(X)|$. Tuttavia, utilizzare una quantit\`a in valore assoluto risulta scomodo da un punto di vista matematico; pertanto, viene considerata la variabile aleatoria $(X - E(X))^2$. In definitiva, si definisce la seguente quantit\`a correlata ad una variabile aleatoria X :

Definizione 1.6(Varianza): Se X \`e una variabile aleatoria, allora la varianza di X , che denotiamo con $V(X)$, \`e definita come

$$V(X) = E[(X - E[X])^2].$$

Una formula alternativa per $V[X]$ si deriva nel seguente modo, dove $\mu = E[X]$:

$$\begin{aligned}
 V[X] &= E[(X - \mu)^2] \\
 &= \sum_x (x - \mu)^2 p(x) \\
 &= \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) p(x) \\
 &= \sum_x x^2 p(x) - 2\mu \sum_x x p(x) + \mu^2 \sum_x p(x) \\
 &= E[x^2] - 2\mu^2 + \mu^2 \\
 &= E[X^2] - \mu^2
 \end{aligned}$$

Quindi,

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

cio\`e, la varianza di X \`e uguale alla differenza fra il valore atteso di X^2 e il quadrato del suo valore atteso.

Il seguente teorema dimostra la linearit\`a della varianza per variabili aleatorie indipendenti:

Teorema 1.2: La varianza della somma di variabili indipendenti \`e uguale alla somma delle varianze delle singole variabili. Se X e Y sono due variabili indipendenti, allora:

$$V[X + Y] = V[X] + V[Y]$$

Dimostrazione: Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, per definizione di varianza sappiamo che

$$\begin{aligned} V[X+Y] &= E[((X+Y) - (E[X] + E[Y]))^2] \\ &= E[(X - E[X] + Y - E[Y])^2] \\ &= E[(X - E[X])^2 + (Y - E[Y])^2 + 2(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= E[(X - E[X])^2] + E[(Y - E[Y])^2] + 2E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= V[X] + V[Y] + 2E[X - E[X]]E[Y - E[Y]] \end{aligned}$$

ma $E[X - E[X]] = E[X] - E[E[X]] = E[X] - E[X] = 0$, quindi

$$V[X+Y] = V[X] + V[Y]$$

□

1.4.3 Disuguaglianze di Markov e di Chebyshev

La disuguaglianza di Markov fornisce una stima della distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria non negativa mediante una relazione con il suo valore atteso.

Teorema 1.3: (Disuguaglianza di Markov) Sia X una variabile aleatoria non negativa. Allora, per ogni $v > 0$,

$$P[X \geq v] \leq \frac{E[X]}{v}$$

Dimostrazione: Dimostriamo la disuguaglianza di Markov nel caso in cui la variabile aleatoria X sia discreta. La dimostrazione per il caso continuo è analoga.

Vogliamo mostrare che

$$vP[X \geq v] \leq E[X]$$

Dalla definizione di valore medio segue che

$$E[X] = \sum_{u < v} uP[X = u] + \sum_{u \geq v} uP[X = u]$$

Poiché X è non negativa, abbiamo che

$$E[X] \geq \sum_{u \geq v} uP[X = u] \geq \sum_{u \geq v} vP[X = u] = v \sum_{u \geq v} P[X = u] = vP[X \geq v]$$

La disuguaglianza di Markov risulta così essere dimostrata. □

La disuguaglianza di Chebyshev fornisce una stima della probabilità che una variabile aleatoria si discosti dal suo valore atteso utilizzando la conoscenza della varianza della variabile.

Teorema 1.4: (Disuguaglianza di Chebyshev) Sia X una variabile aleatoria. Allora, per ogni $s > 0$,

$$P[|X - E[X]| \geq s] \leq \frac{V[X]}{s^2}$$

Dimostrazione: Consideriamo la variabile aleatoria non negativa $Y = (X - E[X])^2$. Poiché $A > 0$, $B > 0$ e $A^2 > B^2$ implica $A > B$, abbiamo che

$$P[Y \geq s^2] = P[(X - E[X])^2 \geq s^2] = P[|X - E[X]| \geq s]$$

In base alla disuguaglianza di Markov, possiamo affermare che

$$P[|X - E[X]| \geq s] = P[Y \geq s^2] \leq \frac{E[Y]}{s^2} = \frac{V[X]}{s^2}$$

La disuguaglianza di Chebyshev risulta così essere dimostrata. □

1.4.4 Limiti di Chernoff

I limiti di Chernoff si applicano a variabili aleatorie che possono essere espresse come somma di variabili aleatorie indipendenti. Essi forniscono una limitazione alla probabilità di tali variabili di discostarsi dal valore atteso che decresce esponenzialmente all'allontanarsi dal valore medio. In questo paragrafo dimostreremo i limiti di Chernoff nel caso in cui le variabili aleatorie di cui la somma è costituita possano assumere solo i valori 0 e 1.

Teorema 1.5: (Primo Limite di Chernoff) Siano X_1, \dots, X_n variabili aleatorie binarie indipendenti tali che, per $i = 1, \dots, n$, $P[X_i = 1] = p_i$. Indicando con $X = \sum_{i=1}^n X_i$ e con $\mu = E[X]$, allora, per ogni $\delta \in (0, 1)$, vale la seguente disuguaglianza:

$$P[X \leq (1 - \delta)\mu] < \left[\frac{e^{-\delta}}{(1 - \delta)^{(1-\delta)\mu}} \right]^\mu.$$

Dimostrazione: Per ogni $t > 0$, osserviamo che

$$P[X \leq (1 - \delta)\mu] = P[-tX \geq -t(1 - \delta)\mu] = P[e^{-tX} \geq e^{-t(1-\delta)\mu}].$$

Inoltre, dalla disuguaglianza di Markov, segue che

$$P[e^{-tX} \geq e^{-t(1-\delta)\mu}] \leq \frac{E[e^{-tX}]}{e^{-t(1-\delta)\mu}}$$

Poiché

$$e^{-tX} = e^{-t\sum_{i=1}^n X_i} = e^{-t(X_1 + X_2 + \dots + X_n)} = e^{-tX_1} \cdot e^{-tX_2} \cdot \dots \cdot e^{-tX_n} = \prod_{i=1}^n e^{-tX_i}$$

e poiché il valore medio del prodotto di variabili aleatorie indipendenti è uguale al prodotto dei valori medi delle variabili stesse, abbiamo che

$$E[e^{-tX}] = E\left[\prod_{i=1}^n e^{-tX_i}\right] = \prod_{i=1}^n E[e^{-tX_i}].$$

Dalla definizione di valore medio, segue che

$$E[e^{-tX_i}] = p_i e^{-t \cdot 1} + (1 - p_i) e^{-t \cdot 0} = p_i e^{-t} + 1 - p_i = 1 - p_i(1 - e^{-t}).$$

Poiché, per il Lemma 1.1 (si veda più avanti), $1 - \alpha < e^{-\alpha}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, ponendo $\alpha = p_i(1 - e^{-t})$ ed osservando che $\alpha \neq 0$ per ogni $t > 0$, abbiamo che $1 - p_i(1 - e^{-t}) < e^{p_i(e^{-t}-1)}$, da cui

$$E[e^{-tX_i}] < e^{p_i(e^{-t}-1)}.$$

Poiché $\mu = \sum_{i=1}^n p_i$, segue che, per ogni $t > 0$,

$$E[e^{-tX}] = \prod_{i=1}^n E[e^{-tX_i}] < \prod_{i=1}^n e^{p_i(e^{-t}-1)} = e^{\sum_{i=1}^n p_i(e^{-t}-1)} = e^{\mu(e^{-t}-1)}$$

e, quindi,

$$P[X \leq (1 - \delta)\mu] = P[e^{-tX} \geq e^{-t(1-\delta)\mu}] \leq \frac{E[e^{-tX}]}{e^{-t(1-\delta)\mu}} < \frac{e^{\mu(e^{-t}-1)}}{e^{-t(1-\delta)\mu}} = e^{\mu(e^{-t} + t - t\delta - 1)}.$$

A questo punto, al fine approssimare al meglio il valore $P[X \leq (1 - \delta)\mu]$, calcoliamo il valore di t che rende la parte destra della suddetta disuguaglianza più piccola possibile. A tale scopo, consideriamo la funzione

$$f(t) = e^{-t} + t - t\delta - 1.$$

La derivata di $f(t)$ è $f'(t) = -e^{-t} + 1 - \delta$ e si annulla per $t_0 = \ln\left(\frac{1}{1-\delta}\right)$; inoltre, $f'(t)$ è sempre negativa a sinistra di t_0 e sempre positiva alla sua destra. Allora, il valore t_0 è un minimo assoluto di $f(t)$. Sostituendo il valore t_0 in $f(t) = e^{\mu(e^{-t} + t - t\delta - 1)}$ ed osservando che $t_0 > 0$ per ogni $\delta \in (0, 1)$, otteniamo

$$e^{\mu\left(e^{-\ln\left(\frac{1}{1-\delta}\right)} + \ln\left(\frac{1}{1-\delta}\right) - \delta \ln\left(\frac{1}{1-\delta}\right) - 1\right)} = e^{\mu\left((1-\delta) + (1-\delta)\ln\left(\frac{1}{1-\delta}\right) - 1\right)},$$

dove l'uguaglianza si ottiene raccogliendo i fattori comuni e ricordando che $a^{\log_a x} = \log_a a^x = x$. Quindi,

$$P[X \leq (1 - \delta)\mu] < e^{\mu \left((1-\delta) + (1-\delta) \ln \left(\frac{1}{1-\delta} \right) - 1 \right)},$$

ovvero,

$$\begin{aligned} P[X \leq (1 - \delta)\mu] < e^{\mu \left((1-\delta) + (1-\delta) \ln \left(\frac{1}{1-\delta} \right) - 1 \right)} &= e^{\mu(1-\delta)} \cdot e^{\mu(1-\delta) \ln \left(\frac{1}{1-\delta} \right)} \cdot e^{-\mu} \\ &= e^{\mu(1-\delta-1)} \cdot e^{\mu \ln(1-\delta)^{-(1-\delta)}} \\ &= \left[e^{-\delta} \cdot (1-\delta)^{-(1-\delta)} \right]^\mu \\ &= \left[\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{(1-\delta)}} \right]^\mu. \end{aligned}$$

Il primo limite di Chernoff risulta così essere dimostrato. \square

Lemma 1.1: Per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale $1 - x \leq e^{-x}$. Inoltre, se $x \neq 0$ allora $1 - x < e^{-x}$.

Dimostrazione: Definiamo una funzione $G(x)$ nella maniera seguente

$$G(x) = 1 - x - e^{-x}$$

Calcoliamo la derivata prima di $G(x)$, ottenendo che

$$G'(x) = e^{-x} - 1$$

Studiamo il segno della derivata prima di $G(x)$

$$G'(x) = e^{-x} - 1 \geq 0$$

$$e^{-x} \geq 1$$

$$e^{-x} \geq e^0$$

$$-x \geq 0$$

$$x \leq 0$$

Per $x \leq 0$ la funzione $G'(x)$ è dunque positiva, mentre per $x > 0$ risulta essere negativa. Quindi, la funzione $G(x)$ presenta un punto di massimo relativo in $x = 0$ che, essendo l'unico punto in cui la derivata si annulla, è anche un punto di massimo assoluto. Poiché $G(0) = 1 - 0 - e^{-0} = 0$, allora la $G(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ da cui, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$1 - x - e^{-x} \leq 0$$

e, per ogni $x \neq 0$,

$$1 - x - e^{-x} < 0$$

come volevamo dimostrare. \square

Il limite di Chernoff appena dimostrato non è particolarmente comodo da calcolare e, quindi, da utilizzare. Per questo motivo, spesso ne viene usata la seguente versione semplificata, che evidenzia come la probabilità decresce in maniera esponenziale rispetto alla distanza δ dal valore medio.

Teorema 1.6: (Forma semplificata del primo limite di Chernoff) Siano X_1, \dots, X_n variabili aleatorie binarie indipendenti tali che, per $i = 1, \dots, n$, $P[X_i = 1] = p_i$. Indicando con $X = \sum_{i=1}^n X_i$ e con $\mu = E[X]$, allora, per ogni $\delta \in (0, 1)$, vale la seguente disuguaglianza:

$$P[X \leq (1 - \delta)\mu] < e^{-\frac{\mu\delta^2}{2}}$$

Dimostrazione: Osserviamo che

$$(1 - \delta)^{(1-\delta)} = e^{(1-\delta)\ln(1-\delta)}.$$

Inoltre, sviluppando in serie di Taylor il logaritmo naturale, si ottiene

$$\ln(1 - \delta) = -\delta - \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} - \dots$$

Quindi,

$$\begin{aligned} (1 - \delta)\ln(1 - \delta) &= (1 - \delta) \left(-\delta - \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} - \dots \right) = -\delta + \delta^2 - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{2} - \frac{\delta^3}{3} + \frac{\delta^4}{3} \dots \\ &= -\delta + \frac{\delta^2}{2} + \sum_{i>2} \left(\frac{\delta^i}{i-1} - \frac{\delta^i}{i} \right) > -\delta + \frac{\delta^2}{2} \end{aligned}$$

dove la diseuguaglianza è dovuta al fatto che, per ogni $i > 2$, $\frac{\delta^i}{i-1} > \frac{\delta^i}{i}$.

Poiché la funzione esponenziale è una funzione crescente, abbiamo che

$$(1 - \delta)^{(1-\delta)} = e^{(1-\delta)\ln(1-\delta)} > e^{-\delta + \frac{\delta^2}{2}}$$

Sostituendo nel limite di Chernoff, otteniamo che

$$P[X \leq (1 - \delta)\mu] < \left(\frac{e^{-\delta}}{(1 - \delta)^{(1-\delta)}} \right)^\mu < \left(\frac{e^{-\delta}}{e^{-\delta + \frac{\delta^2}{2}}} \right)^\mu = \frac{e^{-\mu\delta}}{e^{-\mu\delta + \frac{\mu\delta^2}{2}}} = e^{-\mu\delta} \cdot \frac{1}{e^{-\mu\delta} \cdot e^{\frac{\mu\delta^2}{2}}} = e^{-\frac{\mu\delta^2}{2}}$$

□

Teorema 1.7: (Secondo limite di Chernoff) Siano X_1, \dots, X_n variabili aleatorie binarie indipendenti tali che, per $i = 1, \dots, n$, $P[X_i = 1] = p_i$. Indicando con $X = \sum_{i=1}^n X_i$ e con $\mu = E[X]$, allora, per ogni $\delta > 0$, vale la seguente diseuguaglianza:

$$P[X \geq (1 + \delta)\mu] < \left(\frac{e^\delta}{(1 + \delta)^{(1+\delta)}} \right)^\mu$$

Dimostrazione: Per ogni $t > 0$, osserviamo che

$$P[X \geq (1 + \delta)\mu] = P[e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}]$$

Inoltre, dalla diseuguaglianza di Markov, segue che

$$P[e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}] < \frac{E[e^{tX}]}{e^{t(1+\delta)\mu}}$$

Come nella dimostrazione del primo limite di Chernoff,

$$e^{tX} = e^{t\sum_{i=1}^n X_i} = \prod_{i=1}^n e^{tX_i}$$

e, poiché il valore medio del prodotto di variabili aleatorie indipendenti è uguale al prodotto dei valori medi delle variabili stesse, abbiamo che

$$E[e^{tX}] = \prod_{i=1}^n E[e^{tX_i}]$$

Dalla definizione di valore medio, segue che

$$E[e^{tX_i}] = p_i e^{t \cdot 1} + (1 - p_i) e^{t \cdot 0} = p_i e^t + 1 - p_i = 1 - p_i(1 - e^t)$$

Poiché $1 - \alpha < e^{-\alpha}$ per ogni α , ponendo $\alpha = p_i(1 - e^t)$ abbiamo che

$$E[e^{tX_i}] < e^{p_i(e^t - 1)}$$

Poiché $\mu = \sum_{i=1}^n p_i$, segue che

$$E[e^{tX}] = \prod_{i=1}^n E[e^{tX_i}] < \prod_{i=1}^n e^{p_i(e^t - 1)} = e^{\sum_{i=1}^n p_i(e^t - 1)} = e^{\mu(e^t - 1)}$$

Quindi,

$$P[X \geq (1 + \delta)\mu] = P[e^{tX} \geq e^{t(1 + \delta)\mu}] < \frac{E[e^{tX}]}{e^{t(1 + \delta)\mu}} = \frac{e^{\mu(e^t - 1)}}{e^{t(1 + \delta)\mu}} = e^{\mu(e^t - t - t\delta - 1)}$$

A questo punto, calcoliamo il valore di t che rende la parte destra della suddetta disuguaglianza più piccola possibile: a tale scopo, osserviamo che la derivata di $e^t - t - t\delta - 1$ è uguale a $e^t - 1 - \delta$ e che la soluzione dell'equazione $e^t - 1 - \delta = 0$ è data da $t = \ln(1 + \delta)$. Sostituendo tale valore di t in $e^{\mu(e^t - t - t\delta - 1)}$ otteniamo:

$$e^{\mu(e^{\ln(1 + \delta)} - \ln(1 + \delta) - \delta \ln(1 + \delta) - 1)}$$

Ora, raccogliendo i fattori comuni e ricordando che $a^{\log_a x} = \log_a a^x = x$ abbiamo che $e^{\mu((1 + \delta) - (1 + \delta)\ln(1 + \delta) - 1)}$, e quindi

$$\begin{aligned} P[X \geq (1 + \delta)\mu] &< e^{\mu((1 + \delta) - (1 + \delta)\ln(1 + \delta) - 1)} = e^{\mu(1 + \delta)} \cdot e^{-\mu(1 + \delta)\ln(1 + \delta)} \cdot e^{-\mu} \\ &= \frac{e^{\mu(1 + \delta - 1)}}{e^{\mu(1 + \delta)\ln(1 + \delta)}} \\ &= \left(\frac{e^\delta}{e^{\ln(1 + \delta)(1 + \delta)}} \right)^\mu \\ &= \left(\frac{e^\delta}{(1 + \delta)^{(1 + \delta)}} \right)^\mu \end{aligned}$$

Il secondo limite di Chernoff risulta così essere dimostrato. \square

Anche nel caso del secondo limite di Chernoff, si fa spesso uso della sua seguente versione semplificata, valida nel solo caso in cui $\delta > 2e - 1$.

Teorema 1.8: (Forma semplificata del secondo limite di Chernoff) Siano X_1, \dots, X_n variabili aleatorie binarie indipendenti tali che, per $i = 1, \dots, n$, $P[X_i = 1] = p_i$. Indicando con $X = \sum_{i=1}^n X_i$ e con $\mu = E[X]$, allora, per ogni $\delta > 2e - 1$, vale la seguente disuguaglianza:

$$P[X \geq (1 + \delta)\mu] < \left(\frac{e^\delta}{(1 + \delta)^{(1 + \delta)}} \right)^\mu < \left(\frac{e^\delta}{(2e)^{(1 + \delta)}} \right)^\mu < \left(\frac{e^\delta}{(2e)^\delta} \right)^\mu = 2^{-\delta\mu}$$

1.5 Analisi probabilistica dell'MTR per reti stazionarie

In questo paragrafo vengono considerate soluzioni probabilistiche al problema MTR per reti stazionarie ad hoc con raggio di trasmissione omogeneo. Abbiamo già osservato come l'evidenza sperimentale mostri che la misura del raggio di trasmissione minimo che garantisce la connessione della rete dipenda dal numero n di nodi. Indichiamo, allora, con $r(n)$ il raggio di trasmissione che viene assegnato a ciascun nodo di un insieme di n nodi.

Consideriamo n nodi localizzati in punti scelti uniformemente a caso in una regione Q quadrata di lato unitario ($Q = [0, 1]^2$) ed assumiamo che ciascuno di essi trasmetta con potenza tale da coprire un area circolare di raggio $r(n)$. La rete corrispondente viene modellata mediante il grafo geometrico casuale $G^2(n, r(n))$.

Dimostreremo, in questo paragrafo, che la lunghezza minima $r^*(n)$ del raggio di trasmissione che garantisce, con probabilità ragionevole, che $G^2(n, r^*(n))$ è connesso è in $\Theta\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)$. Il procedimento che seguiremo è il seguente: innanzi tutto, mostreremo che esiste una costante $\gamma_1 > 0$ tale che $G^2(n, r(n))$ è connesso con alta probabilità se

$r(n) \geq \gamma_1 \left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}} \right)$ (delimitazione superiore). Successivamente, mostreremo che, per ogni costante c , $G^2(n, r(n))$ è non connesso con probabilità non nulla se $r(n) \leq \sqrt{\frac{\ln n + c}{n}}$ (delimitazione inferiore).

1.5.1 Una delimitazione superiore al minimo raggio di trasmissione

Teorema 1.9: *Esiste una costante positiva γ_1 tale che, scegliendo*

$$r(n) \geq \gamma_1 \sqrt{\frac{\ln n}{n}},$$

il grafo di comunicazione della rete è connesso con alta probabilità.

Dimostrazione: Fissiamo un valore $k(n) > 0$ e partizioniamo il quadrato $Q = [0, 1]^2$ in $k^2(n)$ celle, ognuna di lato di dimensione $\frac{1}{k(n)}$ (Figura 1.6). Diciamo, inoltre, *adiacenti* due celle che hanno un lato in comune (Figura 1.7).

A questo punto, scegliamo un valore $r(k(n))$ (ossia, dipendente da dal valore $k(n)$) e mostriamo che:

1. il sottografo di $G^2(n, r(k(n)))$ indotto dai punti contenuti in celle adiacenti è connesso;
2. è possibile scegliere $k(n)$ in modo tale che, per ogni cella C , con alta probabilità esiste un nodo $u \in C$ (ossia, con alta probabilità nessuna cella è vuota).

È immediato verificare che se sono vere le due proprietà sopra allora il grafo di comunicazione è connesso con alta probabilità (osserviamo esplicitamente che l'implicazione inversa non è vera).

Nel seguito, allo scopo di non appesantire troppo la notazione, scriveremo $r(n)$ invece che $r(k(n))$.

Per soddisfare la prima proprietà, scegliamo un valore $r(n)$ mediante il quale ciascun nodo possa connettersi a qualunque altro nodo contenuto nella sua stessa cella oppure in una delle celle ad essa adiacenti; a questo scopo, $r(n)$ viene scelto pari alla lunghezza della diagonale del rettangolo che si forma considerando due celle adiacenti (Figura 1.7). Allora, per il teorema di Pitagora si ha

$$\begin{aligned} r^2(n) &= \left(\frac{1}{k(n)} \right)^2 + \left(\frac{1}{k(n)} + \frac{1}{k(n)} \right)^2 = \left(\frac{1}{k(n)} \right)^2 + \left(\frac{2}{k(n)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{k^2(n)} + \frac{4}{k^2(n)} \\ &= \frac{5}{k^2(n)} \end{aligned}$$

da cui si ricava $r(n) = \frac{\sqrt{5}}{k(n)}$. Talvolta, in quanto segue, sarà utile considerare la formula inversa di quella appena mostrata, ossia,

$$k(n) = \frac{\sqrt{5}}{r(n)}.$$

Questo valore di $r(n)$ garantisce che un nodo contenuto in una cella è connesso ad ogni nodo che si trova nella sua stessa cella (dunque, il sottografo indotto dai nodi contenuti in una cella è connesso) e ad ogni nodo che si trova in una delle celle ad essa adiacenti (dunque, il sottografo indotto dai nodi contenuti in due celle adiacenti non vuote è connesso).

A questo punto, per garantire la connessione del grafo di comunicazione, è sufficiente dimostrare il secondo punto sopra elencato, ossia dimostrare che, scegliendo opportunamente $k(n)$ (o, equivalentemente, $r(n) = \frac{\sqrt{5}}{k(n)}$), con alta probabilità nessuna cella è vuota.

Per ogni $i = 1, \dots, n$ e per ogni cella C contenuta in Q , consideriamo la variabile aleatoria $X_i(C)$ così definita:

$$X_i(C) = \begin{cases} 1 & \text{se il nodo } i \text{ si trova all'interno della cella } C \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

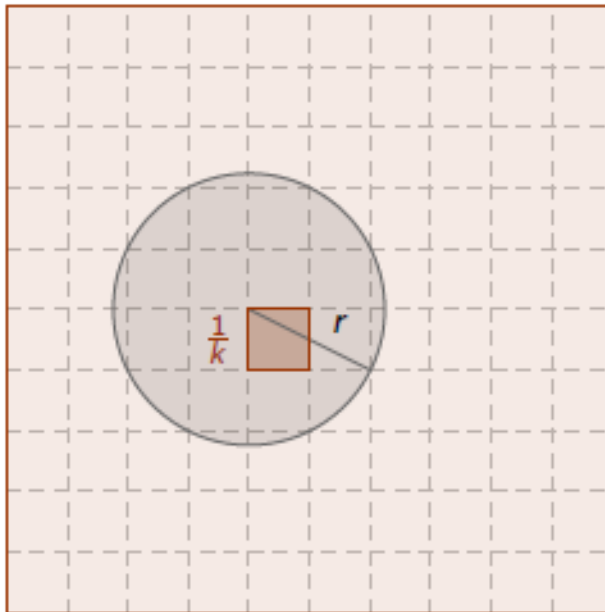


Figura 1.6: Suddivisione in celle del quadrato unitario

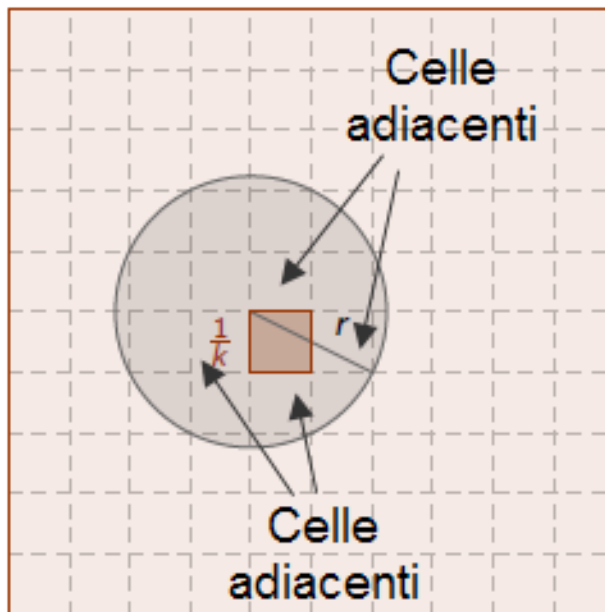


Figura 1.7: Celle adiacenti ad una data cella

che descrive la probabilità che un nodo i sia contenuto nella cella C del quadrato unitario Q . Allora,

$$P[X_i(C) = 1] = \frac{\text{Area della cella } C}{\text{Area del quadrato unitario } Q} = \frac{\frac{1}{k^2(n)}}{1} = \frac{1}{k^2(n)}$$

Definiamo, inoltre, la seguente variabile aleatoria:

$$X(C) = \sum_i X_i(C)$$

che denota il numero di nodi contenuti nella cella C . Valutiamo, ora, la probabilità che la cella C sia vuota, ossia, che $P[X(C) < 1]$. Allo scopo, utilizzeremo il primo limite di Chernoff.

Scegliamo $r(n) = \gamma_1 \sqrt{\frac{\ln n}{n}}$. Per definizione di valore atteso, abbiamo che:

$$\begin{aligned} E[X(C)] &= \sum_{i=1}^n X_i(C) P[X_i(C) = 1] = \frac{n}{k^2(n)} = n \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{r(n)}\right)^2} = n \cdot \frac{r^2(n)}{5} = n \cdot \frac{\left(\gamma_1 \sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)^2}{5} \\ &= \frac{n}{5} \cdot \gamma_1^2 \frac{\ln n}{n} = \frac{\gamma_1^2}{5} \ln n \end{aligned}$$

quindi

$$E[X(C)] = \frac{\gamma_1^2}{5} \ln n$$

Denotiamo con $\mu = E[X(C)]$ e sia $\delta = \frac{\mu-1}{\mu}$; allora, $(1-\delta)\mu = 1$ e $P[X(C) < 1] = P[X(C) < (1-\delta)\mu]$.

Poiché $0 < \delta < 1$ possiamo utilizzare il primo limite di Chernoff $\left(P[X \leq (1-\delta)\mu] < \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{(1-\delta)}}:$

$$\begin{aligned} P[X(C) < 1] &= P\left[X(C) < \left(\frac{\mu - \mu + 1}{\mu}\right)\mu\right] = P\left[X(C) < \left(1 - \frac{\mu-1}{\mu}\right)\mu\right] \\ &< \frac{\left(e^{-\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)}\right)^\mu}{\left(\left(1 - \frac{\mu-1}{\mu}\right)^{\left(1 - \frac{\mu-1}{\mu}\right)}\right)^\mu} = \frac{e^{\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)\mu}}{\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\left(\frac{1}{\mu}\right)\mu}} = \mu e^{1-\mu} \end{aligned}$$

Quindi, la probabilità che *una* cella sia vuota è limitata dalla seguente quantità:

$$P[X(C) < 1] < E[X(C)]e^{1-E[X(C)]}$$

Infine, applicando lo Union Bound ², la probabilità che *esista* una cella vuota è limitata dalla somma delle probabilità

²In teoria della probabilità, la disuguaglianza di Boole, che prende il nome da George Boole, (nota anche come Union Bound) dice che per ogni insieme finito o numerabile di eventi, la probabilità che almeno uno degli eventi accada non è superiore alla somma delle probabilità dei singoli eventi. Formalmente, per un insieme numerabile di eventi A_1, A_2, A_3, \dots , abbiamo

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i P(A_i).$$

che ciascuna cella sia vuota:

$$\begin{aligned}
P[\exists C : X(C) < 1] &\leq \sum_C P[X(C) < 1] < k^2(n) \cdot E[X(C)] e^{1-E[X(C)]} \quad ((k^2(n)): \text{numero di celle totali in } Q) \\
&\leq \left(\frac{\sqrt{5}}{r(n)} \right)^2 \cdot \left(\frac{\gamma_1^2}{5} \ln n \right) e^{\left(1 - \frac{\gamma_1^2}{5} \ln n\right)} \leq \left(\frac{\sqrt{5}}{\gamma_1 \sqrt{\frac{\ln n}{n}}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\gamma_1^2}{5} \ln n \right) e^{\left(1 - \frac{\gamma_1^2}{5} \ln n\right)} \\
&= \left(\frac{5n}{\gamma_1^2 \ln n} \right) \cdot \left(\frac{\gamma_1^2}{5} \ln n \right) e^{\left(1 - \frac{\gamma_1^2}{5} \ln n\right)} \leq n \cdot \left(e \cdot e^{-\frac{\gamma_1^2}{5} \ln n} \right) \\
&= n \cdot e \cdot n^{-\frac{\gamma_1^2}{5}} = en^{1-\frac{\gamma_1^2}{5}}
\end{aligned}$$

Dal precedente risultato, segue che

se $\gamma_1 > \sqrt{5}$ allora con alta probabilità non esistono celle vuote.

Infatti, se $\gamma_1 > \sqrt{5}$, allora $1 - \frac{\gamma_1^2}{5} < 0$ e, quindi, esiste una costante $a > 0$ tale che

$$P[X(C) < 1] \leq e \cdot \frac{1}{n^a} \quad \text{con } c > 0$$

In conclusione, abbiamo dimostrato che, scegliendo $r(n) = \left\lceil \frac{\sqrt{5}}{k(n)} \right\rceil$, il sottografo indotto da ogni cella della regione di collocamento è connesso e che ogni sottografo, a sua volta, è connesso con alta probabilità ai sottografi indotti dalle celle adiacenti. Questo implica che i sottografi indotti dalle celle sono fra loro connessi, ossia, che $G^2(n, r(n))$ è connesso con alta probabilità. \square

1.5.2 Una delimitazione inferiore al minimo raggio di trasmissione

Mostriamo, in questa sottosezione, che esiste $\tilde{r}(n) \in \Theta(\sqrt{\frac{\ln n}{n}})$ tale che non è vero che $G(n, \tilde{r})$ è connesso con alta probabilità. Questo significa che la delimitazione superiore studiata nella precedente sezione è asintoticamente ottimale, ossia, se scegliamo $r(n)$ asintoticamente più piccolo di $\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$ ($r(n) \in \mathbf{o}(\sqrt{\frac{\ln n}{n}})$) allora non siamo più in grado di garantire la connessione del grafo di comunicazione $G^2(n, r(n))$ con alta probabilità.

Teorema 1.10: Per ogni costante positiva c , se

$$r(n) = \sqrt{\frac{\ln n + c}{\pi n}}$$

allora $\lim_{n \rightarrow \infty} P[G^2(n, r(n)) \text{ è non connesso}] > 0$.

Dimostrazione: Ricordiamo che i nodi sono distribuiti uniformemente a caso nel quadrato unitario $Q = [0, 1]^2$ e che denotiamo l'insieme dei nodi e degli archi di $G^2(n, r(n))$, rispettivamente, con $N = \{1, \dots, n\}$ e con E .

Cerchiamo, in quanto segue, per quali valori di $r(n)$ è vero che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[G^2(n, r(n)) \text{ è non connesso}] > 0.$$

Per semplicità, nel resto della dimostrazione denoteremo con G il grafo di comunicazione $G^2(n, r(n))$ e con r il valore $r(n)$. Introduciamo la seguente notazione che verrà utilizzata nel seguito della dimostrazione:

- \mathcal{E} è l'evento “ G non è connesso”;
- \mathcal{E}_u è l'evento “ G contiene almeno un nodo isolato”;
- $\mathcal{E}_{i_1 i_2 \dots i_h}$ è l'evento “i nodi i_1, i_2, \dots, i_h sono isolati in G ”;

- $\mathcal{E}_i!$ è l'evento “ i è l'unico nodo isolato in G ”;
- dati h nodi distinti $i_1, i_2, \dots, i_h \in N$, $N_{i_1 i_2 \dots i_h}^-$ è l'insieme $N - \{i_1, i_2, \dots, i_h\}$.

Ovviamente, se G contiene almeno un nodo isolato, allora G non è connesso, ossia,

$$P[\mathcal{E}_u] > 0 \Rightarrow P[\mathcal{E}] > 0.$$

Inoltre, è vero che

$$P[\mathcal{E}] \geq P[\mathcal{E}_u] \geq \sum_i P[\mathcal{E}_i!] \geq \sum_i \left(P[\mathcal{E}_i] - \sum_{j \in N_i^-} P[\mathcal{E}_{ij}] \right),$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dalle seguenti due considerazioni:

1. i è un nodo isolato in G se i è l'unico nodo isolato in G oppure se esiste un altro nodo j (distinto da i) tale che i e j sono nodi isolati in G . Formalmente:

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i! \cup \bigcup_{j \in N_i^-} \mathcal{E}_{ij}.$$

Pertanto,

$$\mathcal{E}_i! = \mathcal{E}_i - \bigcup_{j \in N_i^-} \mathcal{E}_{ij};$$

2. per ogni $j \in N_i^-$ e per ogni $k \in N_{ij}^-$, l'intersezione tra l'evento “ i e j sono nodi isolati” e l'evento “ i e k sono nodi isolati” è l'evento “ i, j e k sono nodi isolati”, ossia, gli eventi \mathcal{E}_{ij} e \mathcal{E}_{ik} non sono disgiunti; formalmente:

$$\mathcal{E}_{ij} \cap \mathcal{E}_{ik} = \mathcal{E}_{ijk}.$$

Per dimostrare che $P[\mathcal{E}] > 0$ è dunque sufficiente trovare una delimitazione inferiore a $P[\mathcal{E}_i]$ ed una delimitazione superiore a $P[\mathcal{E}_{ij}]$.

Delimitiamo inferiormente $P[\mathcal{E}_i]$

Indichiamo con t_i il punto interno a Q in cui il nodo i è collocato (che, ricordiamo, viene scelto uniformemente a caso all'interno di Q). Definiamo:

- $C_r(t_i)$ è l'intersezione tra Q e il cerchio di raggio r centrato in t_i ;
- per $i \in N$, $\mathcal{I}_i(t_i)$ è l'evento “nessun nodo $j \neq i$ è contenuto in $C_r(t_i)$ ”:

$$\mathcal{I}_i(t_i) : “\forall j \in N_i^- : j \notin C_r(t_i)”$$

- $A_r(t_i)$: area dell'intersezione fra $C_r(t_i)$ e Q .

Per definizione, la probabilità che i sia un nodo isolato è uguale alla probabilità che ogni altro nodo, diverso da i , non sia all'interno di $C_r(t_i)$. Indicando con $f(t)$ la funzione densità della scelta uniformemente a caso di un punto nel quadrato Q (che rappresenta la possibilità di scegliere proprio quel punto), formalmente questo si esprime nella maniera seguente:

$$P[\mathcal{E}_i] = \int_{t_i \in Q} f(t_i) \cdot P[\mathcal{I}_i(t_i)] dt_i = \int_{t_i \in Q} P[\mathcal{I}_i(t_i)] dt_i$$

L'ultima uguaglianza deriva dal fatto che la funzione densità $f(t_i)$ è tale che $f(t_i) = \frac{1}{\text{Area di } Q} = \frac{1}{1^2} = 1$.

Ma, la probabilità che un punto interno a Q si trovi all'interno di $C_r(t_i)$ è uguale a $A_r(t_i)$; perciò, la probabilità che un nodo si trovi fuori da $C_r(t_i)$ è uguale a $1 - A_r(t_i)$ (probabilità dell'evento contrario). Tale valore è minimo quando

$C_r(t_i)$ è contenuto interamente nel quadrato unitario Q , ossia, $1 - A_r(t_i) \geq 1 - \pi r^2$. Pertanto, la probabilità che $n - 1$ nodi non siano contenuti in $C_r(t_i)$ è non minore di $(1 - \pi r^2) \cdot (1 - \pi r^2) \dots$ per $n - 1$ volte, ovvero

$$P[\mathcal{I}_i(t_i)] \geq (1 - \pi r^2)^{n-1}$$

Quindi, si può concludere che

$$P[\mathcal{E}_i] \geq \int_{t_i \in Q} (1 - \pi r^2)^{n-1} dt_i = (1 - \pi r^2)^{n-1} \int_{t_i \in Q} dt_i = (1 - \pi r^2)^{n-1}$$

Delimitiamo superiormente $P[\mathcal{E}_{ij}]$

Ricordiamo che $t_u \in Q$ denota il punto in cui si trova il nodo $u \in N$.

Assumiamo $j \in N_i^-$. Affinché i e j siano isolati, il nodo j non deve essere contenuto in $C_r(t_i)$ e tutti gli altri nodi, diversi da i e j , non devono essere contenuti in $C_r(t_i)$ né in $C_r(t_j)$:

$$\begin{aligned} P[\mathcal{E}_{ij}] &= \int_{t_i \in Q} f(t_i) \cdot P \left[t_j \notin C_r(t_i) \wedge [\forall h \in N_{ij}^- : t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j)] \right] dt_i = \\ &= \int_{t_i \in Q} f(t_i) \cdot P \left[[t_j \in C_{2r}(t_i) - C_r(t_i) \vee t_j \notin C_{2r}(t_i)] \wedge [\forall h \in N_{ij}^- : t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j)] \right] dt_i = \\ &= \int_{t_i \in Q} f(t_i) \cdot P \left[t_j \in C_{2r}(t_i) - C_r(t_i) \wedge [\forall h \in N_{ij}^- : t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j)] \right] dt_i + \\ &\quad + \int_{t_i \in Q} f(t_i) \cdot P \left[t_j \notin C_{2r}(t_i) \wedge [\forall h \in N_{ij}^- : t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j)] \right] dt_i = \\ &= \int_{t_i \in Q} f(t_i) \cdot P [t_j \in C_{2r}(t_i) - C_r(t_i)] \cdot P \left[\forall h \in N_{ij}^- : t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j) \mid t_j \in C_{2r}(t_i) - C_r(t_i) \right] dt_i + \\ &\quad + \int_{t_i \in Q} f(t_i) \cdot P [t_j \notin C_{2r}(t_i)] \cdot P [\forall h \in N_{ij}^- : t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j) \mid t_j \notin C_{2r}(t_i)] dt_i. \end{aligned}$$

Ora, ricordando che la funzione densità è una costante pari ad 1 ed assumendo che $C_r(t_i)$ e $C_r(t_j)$ siano interamente contenuti in Q (trascurando, cioè, gli effetti al bordo)³,

$$P[\mathcal{E}_{ij}] \leq \int_{t_i \in Q} (4\pi r^2 - \pi r^2) \left(1 - \frac{8}{5} \pi r^2\right)^{n-2} dt_i + \int_{t_i \in Q} (1 - 4\pi r^2) (1 - 2\pi r^2)^{n-2} dt_i.$$

Il primo termine della disuguaglianza sopra si ottiene osservando che, assumendo la distanza fra t_i e t_j compresa fra r e $2r$, l'area di $C_r(t_i) \cup C_r(t_j)$ è minima quando la distanza fra t_i e t_j è *esattamente* r : è ora sufficiente osservare che il valore di tale area minima è

$$2\pi r^2 - 2r^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) > \frac{8}{5} \pi r^2.$$

Quindi, osservando che, nell'espressione di $P[\mathcal{E}_{ij}]$, abbiamo maggiorato la funzione integranda con una costante, e ricordando che Q ha area unitaria,

$$\begin{aligned} P[\mathcal{E}_{ij}] &\leq \left[(4\pi r^2 - \pi r^2) \left(1 - \frac{8}{5} \pi r^2\right)^{n-2} + (1 - 4\pi r^2) (1 - 2\pi r^2)^{n-2} \right] \int_{t_i \in Q} dt_i = \\ &= 3\pi r^2 \left(1 - \frac{8}{5} \pi r^2\right)^{n-2} + (1 - 4\pi r^2) (1 - 2\pi r^2)^{n-2} \leq \\ &\leq 3\pi r^2 \left(1 - \frac{8}{5} \pi r^2\right)^{n-2} + (1 - 2\pi r^2)^{n-1}. \end{aligned}$$

³Complicando leggermente la prova, è possibile giungere agli stessi risultati considerando anche gli effetti ai bordi. Poiché le tecniche rimangono sostanzialmente invariate, per semplicità viene qui proposta la versione semplificata che non considera gli effetti ai bordi.

Sostituiamo ora il valore $r = \sqrt{\frac{\ln n + c}{n\pi}}$ (dove $c > 0$) nell'espressione sopra, e ricordiamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $1 - x < e^{-x}$. Allora,

$$\begin{aligned}
P[\mathcal{E}_{ij}] &\leq 3 \frac{\ln n + c}{n} \left(1 - \frac{8}{5} \frac{\ln n + c}{n}\right)^{n-2} + \left(1 - 2 \frac{\ln n + c}{n}\right)^{n-1} \\
&< 3 \frac{\ln n + c}{n} e^{-\frac{8}{5} \frac{\ln n + c}{n} \cdot (n-2)} + e^{-2 \frac{\ln n + c}{n} \cdot (n-1)} = \\
&= 3 \frac{\ln n + c}{n} n^{-\frac{8}{5} \frac{n-2}{n}} e^{-\frac{8}{5} \frac{n-2}{n} c} + n^{-2 \frac{n-1}{n}} e^{-2 \frac{n-1}{n} c} < 3 \frac{\ln n + c}{n} n^{-\frac{8}{5} \frac{n-2}{n}} e^{-\frac{8}{5} \frac{n-2}{n} c} + n^{-2 \frac{n-2}{n}} e^{-2 \frac{n-2}{n} c} = \\
&= 3 \frac{\ln n + c}{n^{\frac{3}{5}}} n^{-2 \frac{n-2}{n}} e^{-2 \frac{n-2}{n} c + \frac{2}{5} \frac{n-2}{n} c} + n^{-2 \frac{n-2}{n}} e^{-2 \frac{n-2}{n} c} = \left[3 \frac{\ln n + c}{n^{\frac{3}{5}}} e^{\frac{2}{5} \frac{n-2}{n} c} + 1\right] n^{-2 \frac{n-2}{n}} e^{-2 \frac{n-2}{n} c}
\end{aligned}$$

Terminiamo la prova: delimitiamo superiormente $P[\mathcal{E}]$

Una volta trovate una delimitazione inferiore per $P[\mathcal{E}_i]$ ed una delimitazione superiore per $P[\mathcal{E}_{ij}]$, si ottiene che

$$P[\mathcal{E}] \geq \sum_i \left(P[\mathcal{E}_i] - \sum_{j \in N_i^j} P[\mathcal{E}_{ij}] \right) > n(1 - \pi r^2)^{n-1} - n(n-1) \left[3 \frac{\ln n + c}{n^{\frac{3}{5}}} e^{\frac{2}{5} \frac{n-2}{n} c} + 1 \right] n^{-2 \frac{n-2}{n}} e^{-2 \frac{n-2}{n} c}.$$

Osserviamo ora che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(n-1) \left[3 \frac{\ln n + c}{n^{\frac{3}{5}}} e^{\frac{2}{5} \frac{n-2}{n} c} + 1 \right] n^{-2 \frac{n-2}{n}} e^{-2 \frac{n-2}{n} c} = e^{-2c}.$$

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un valore n_ε ($\geq n_0$) tale che, per $n \geq n_\varepsilon$,

$$n(n-1) \left[3 \frac{\ln n + c}{n^{\frac{3}{5}}} e^{\frac{2}{5} \frac{n-2}{n} c} + 1 \right] n^{-2 \frac{n-2}{n}} e^{-2 \frac{n-2}{n} c} < (1 + \varepsilon) e^{-2c}.$$

Quindi, per $n \geq n_\varepsilon$,

$$P[\mathcal{E}] > n(1 - \pi r^2)^{n-1} - (1 + \varepsilon) e^{-2c}.$$

Per dimostrare che $P[\mathcal{E}] > 0$, è allora sufficiente dimostrare $n(1 - \pi r^2)^{n-1} \geq (1 + \varepsilon) e^{-2c}$. Per fare ciò, calcoliamo il logaritmo del lato sinistro della precedente disequazione, ottenendo:

$$\ln(n(1 - \pi r^2)^{n-1}) = \ln n + \ln(1 - \pi r^2)^{n-1} = \ln n + (n-1) \ln(1 - \pi r^2)$$

Sapendo che $\ln(1 - x) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}$, allora, $\ln(1 - \pi r^2) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pi r^2)^k}{k}$.

Così,

$$\ln[n(1 - \pi r^2)^{n-1}] = \ln n - (n-1) \ln(1 - \pi r^2) = \ln n - (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pi r^2)^k}{k}$$

Poiché $\pi r^2 = \frac{\ln n + c}{n}$, allora

$$\ln[n(1 - \pi r^2)^{n-1}] = \ln n - (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln n + c)^k}{kn^k}$$

che possiamo anche scrivere equivalentemente come

$$\ln[n(1 - \pi r^2)^{n-1}] = \ln n - (n-1) \left(\sum_{k=1}^2 \frac{(\ln n + c)^k}{kn^k} + \delta(n) \right)$$

dove

$$\delta(n) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\ln n + c)^k}{kn^k}$$

Ci proponiamo ora di limitare $\delta(n)$:

$$\begin{aligned} \delta(n) &= \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\ln n + c)^k}{kn^k} \leq \frac{1}{3} \int_2^{\infty} \frac{(\ln n + c)^x}{n^x} dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \int_2^k \left(\frac{\ln n + c}{n} \right)^x dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \frac{1}{\ln \left(\frac{\ln n + c}{n} \right)} \left(\frac{\ln n + c}{n} \right)^x \right]_2^k \\ &= -\frac{1}{3} \frac{(\ln n + c)^2}{n^2} \frac{1}{\ln \left(\frac{\ln n + c}{n} \right)} = \frac{1}{3} \frac{(\ln n + c)^2}{n^2} \frac{1}{\ln \left(\frac{n}{\ln n + c} \right)} \end{aligned}$$

essendo $\frac{1}{\ln \left(\frac{n}{\ln n + c} \right)} < 1$ (per n sufficientemente grande) allora

$$\delta(n) \leq \frac{1}{3} \frac{(\ln n + c)^2}{n^2} \frac{1}{\ln \left(\frac{n}{\ln n + c} \right)} < \frac{1}{3} \frac{(\ln n + c)^2}{n^2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \ln [n(1 - \pi r^2)^{n-1}] &\geq \ln n - (n-1) \left[\frac{\ln n + c}{n} + \frac{(\ln n + c)^2}{2n^2} + \frac{(\ln n + c)^2}{3n^2} \right] \\ &= \ln n - (n-1) \left[\frac{\ln n + c}{n} + \frac{5(\ln n + c)^2}{6n^2} \right] \\ &= \ln n - \frac{n-1}{n} (\ln n + c) - \frac{5(n-1)}{6n^2} (\ln n + c)^2 \\ &> \ln n - \ln n - c - \frac{5(n-1)}{6n^2} (\ln n + c) \\ &= -c - \frac{5(n-1)}{6n^2} (\ln n + c)^2. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n-1)}{6n^2} (\ln n + c)^2 = 0$: quindi, per ogni $\omega > 0$ esiste $n_\omega \geq n_\varepsilon$ tale che, per ogni $n \geq n_\omega$,

$$\ln [n(1 - \pi r^2)^{n-1}] \geq -c - \frac{5(n-1)}{6n^2} (\ln n + c)^2 \geq -c - \omega.$$

Questo significa che

$$n(1 - \pi r^2)^{n-1} = e^{\ln(n(1 - \pi r^2)^{n-1})} \geq e^{-c - \omega}.$$

Pertanto, scegliendo un valore $\omega_\varepsilon < c - \ln(1 + \varepsilon)$, possiamo facilmente verificare che, per ogni $n \geq n_{\omega_\varepsilon}$,

$$P[\mathcal{E}] > n(1 - \pi r^2)^{n-1} - (1 + \varepsilon)e^{-2c} \geq e^{-c - \omega_\varepsilon} - (1 + \varepsilon)e^{-2c} > 0.$$

□

Riferimenti bibliografici

- [1] Piyush Gupta, P.R. Kuma, "Critical Power for Asymptotic Connectivity", *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision & Control*, Tampa, Florida-USA, December 1998, 1106-1110, 1998.