Lezione 23 – prove di NP-completezza

Lezione del 29/05/2024

Dimostrazioni di NP-completezza

- Altra lezione prettamente tecnica
  - pressoché una esercitazione
- Vediamo ancora altri esempi di applicazione del teorema 9.3 per dimostrare la NP-completezza di problemi
- Vedremo, in particolare, come dalla NP-completezza di Hamiltonian Cycle discenda la NP-completezza di:
  - Hamiltonian Path
  - Long Path
  - Travelling Salesman Problem
- e come dalla NP-completezza di 3-colorability discenda la NP-completezza di
  - k – colorability , per ogni k costante
  - Colorability
- Questa volta, però, daremo per buona la NP-completezza di Hamiltonian Cycle e di 3-colorability – senza dimostrarla!

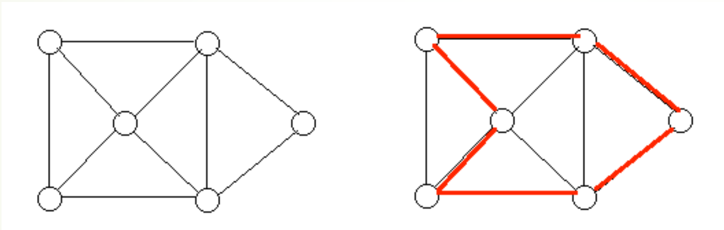
Dimostrazioni di NP-completezza

- Questa volta, però, daremo per buona la NP-completezza di Hamiltonian Cycle e di 3-colorability – senza dimostrarla!
- Ciò mi permette di sottolineare che,
  - una volta che è stata dimostrata la NP-completezza di un problema,
- la *conoscenza* della NP-completezza di quel problema può essere utilizzata per dimostrare la NP-completezza di altri problemi
  - utilizzando, semplicemente, il teorema 9.3
- <u>senza aver bisogno di ricostruire l'intera catena di riduzioni che parte da SAT!</u>

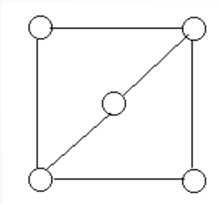
- In un certo senso, il teorema 9.3 ci permette di utilizzare "a scatola nera" le dimostrazioni pregresse di NP-completezza
  - e questo è molto comodo!
- E, infatti, la classe NPC ha ormai innumerevoli membri

Il problema Hamiltonian Cycle (HC)

- Lo abbiamo già incontrato: dato un grafo non orientato G = (V,E), un ciclo in G che passa una ed una sola volta attraverso ogni nodo di G è un ***ciclo hamiltoniano*** in G
- In figura, è illustrato un grafo ed un ciclo hamiltoniano in esso
  - perché un grafo può contenere anche più di un ciclo hamiltoniano: provate!



- D'altra parte, esistono grafi che non contengono cicli hamiltoniani:



  - provare per credere!

Il problema Hamiltonian Cycle (HC)

- Dato un grafo non orientato G = (V,E), esiste un ciclo hamiltoniano in G?
- Questo problema prende il nome di Hamiltonian Cycle (HC, in breve), ed è così formalizzato:
  - $\mathfrak{I}_{HC} = \{ \langle G=(V,E) \rangle : G$ è un grafo non orientato $\}$
  - $\mathbf{S}_{HC}(G) = \{\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle : \text{per } i = 1, \dots, n,\ u_i \in V \wedge n = |V| \}$
  - $\pi_{HC}(G, \mathbf{S}_{HC}(G)) = \exists \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle \in \mathbf{S}_{HC}(G) : (u_n,u_1) \in E \wedge \forall i = 1, \dots, n-1\ [(u_i,u_{i+1}) \in E] \wedge$
    $\forall i,j = 1, \dots, n, \text{ con } i \neq j\ [u_i \neq u_j]$

- Nel paragrafo 9.5.6 viene dimostrata la NP-completezza di HC
  - e la completezza viene dimostrata tramite una riduzione da VC
- Non studiamo il paragrafo 9.5.6
  - ma utilizziamo, in quel che segue, il fatto che HC ∈ NPC

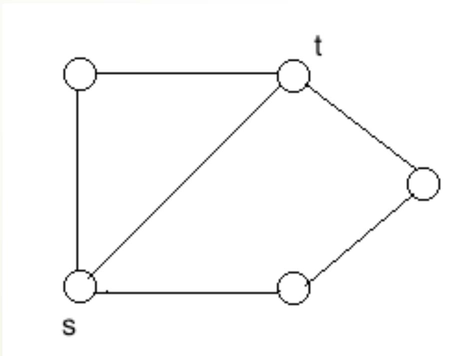
Il problema Hamiltonian Path (HP)

- Dati un grafo non orientato $G = (V,E)$ ed una coppia di nodi $s, t \in V$, esiste un ***percorso hamiltoniano*** da s a t in G, ossia un percorso fra s e t che passa una e una sola volta attraverso ciascun nodo di G?
  - $\mathfrak{I}_{\mathbf{HP}} = \{ \langle G=(V,E), s, t \rangle : G$ è un grafo non orientato $\wedge\, s \in V \wedge t \in V\}$
  - $\mathbf{S}_{\mathbf{HP}}(G, s, t) = \{\langle u_1, u_2, \ldots , u_n\rangle$: per $i = 1, \ldots , n,\ u_i \in V \wedge n = |V|\}$
  - $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{HP}} (G, \mathbf{S}_{\mathbf{HP}}(G)) = \exists \langle u_1, u_2, \ldots , u_n\rangle \in \mathbf{S}_{\mathbf{HP}}(G) : s = u_1 \wedge t = u_n \wedge \forall i = 1, \ldots , n-1\ [(u_i,u_{i+1}) \in E] \wedge$
    $\forall i,j = 1, \ldots , n$, con $i \neq j\ [u_i \neq u_j]$

- Dimostriamo che HP ∈ NP mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale
  - Un certificato è una sequenza di nodi $S = \langle u_1, u_2, \ldots , u_n\rangle$
  - verifichiamo che S è effettivamente un percorso hamiltoniano da s a t, ossia che S soddisfa $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{HP}} (G, s,t, \mathbf{S}_{\mathbf{HP}}(G,s,t))$, in tempo $O(|E|\,|V| + |V|^2)$
  - ossia, in tempo polinomiale in $|\langle G=(V,E), s, t \rangle|$

Il problema Hamiltonian Path (HP)

- Dimostriamo che HP è completo per NP riducendo polinomialmente HC a HP
- In effetti, i due problemi HP e HC si assomigliano moltissimo
  - Attenzione, però: la loro somiglianza potrebbe trarre in inganno
  - Ad una prima occhiata, potremmo pensare di trasformare una istanza ⟨ G=(V,E) ⟩ di HC nell'istanza ⟨ G=(V,E), s, t ⟩ di HP, in cui s e t sono due qualsiasi nodi in V tali che (s,t) ∈ E
  - tanto, potremmo pensare, se c'è un ciclo hamiltoniano in G, esso passa sicuramente sia per s che per t, e, per di più, s e t sono collegati da un arco…
  - ma non funziona! Infatti:



il grafo contiene un ciclo hamiltoniano

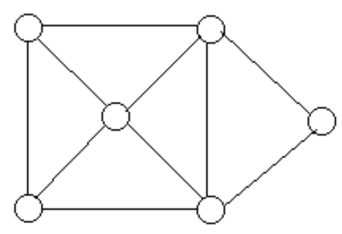
ma non contiene un percorso fra s e t

che passi una e una sola volta per ogni

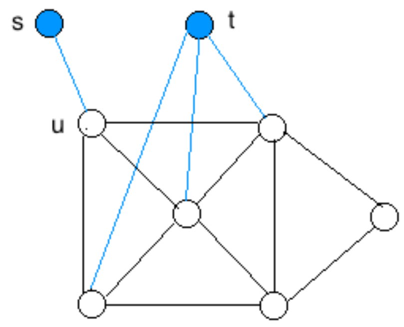
nodo

Il problema Hamiltonian Path (HP)

- Perciò, anche se i due problemi HP e HC si assomigliano moltissimo, dobbiamo procedere con un po' di cautela…
- Dimostriamo che HP è completo per NP riducendo polinomialmente HC a HP
  - ossia, dimostriamo che HC $\preccurlyeq$ HP:
- Trasformiamo una istanza ⟨ G=(V,E)⟩ di HC nell'istanza ⟨ G'=(V',E'), s,t ⟩ di HP, dove
  - s e t sono due nuovi nodi, ossia, s,t ∉ V
  - V' = V U {s,t}
  - ed otteniamo E' scegliendo un nodo u ∈ V, collegando s ad u e collegando t a tutti i nodi che in G sono adiacenti ad u: E' = E U {(s,u)} U { (t,x): (u,x) ∈ E}



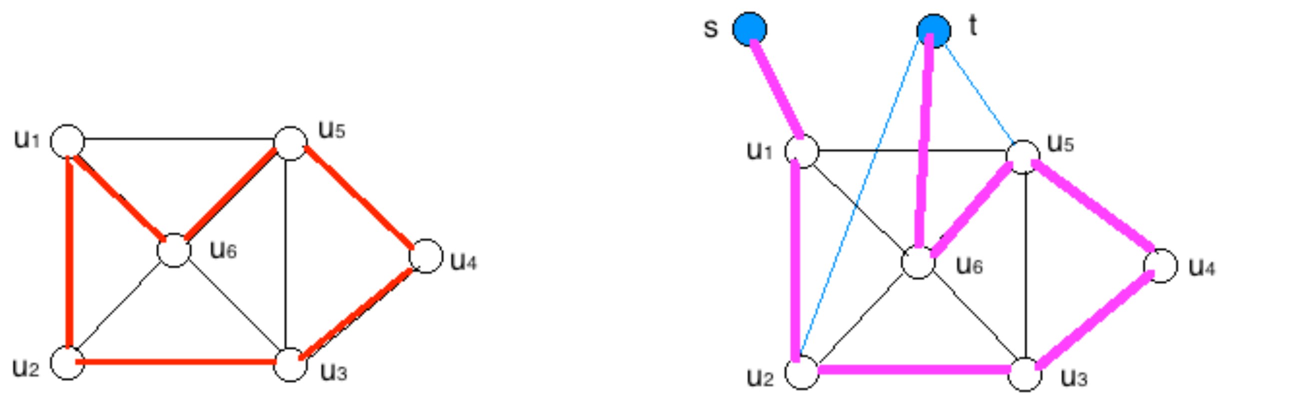
Il grafo G istanza di HC



Il grafo G' e la coppia di nuovi nodi, s e t, istanza di HP

Il problema Hamiltonian Path (HP)

- Trasformiamo una istanza ⟨ $G=(V,E)$⟩ di HC nell'istanza ⟨ $G'=(V',E')$, s,t ⟩ di HP, dove
  - s e t sono due nuovi nodi, ossia, $s,t \notin V$, $V' = V \cup \{s,t\}$, $E' = E \cup \{(s,u)\} \cup \{ (t,x): (u,x) \in E\}$
- Se G contiene un ciclo hamiltoniano ⟨ $u_1, u_2, \dots , u_n$⟩
  - scegliamo $u_1= u$ (il nodo al quale è collegato s)
  - poiché $(u_i,u_{i+1}) \in E$ per ogni $i = 1, \dots , n$ e $u_i \neq u_j$ per $i \neq j$,
  - allora ⟨ $s, u_1, u_2, \dots , u_n, t$ ⟩ è un percorso hamiltoniano in G'



Un ciclo hamiltoniano in G

Il corrispondente percorso hamiltoniano in G'

Il problema Hamiltonian Path (HP)

- Trasformiamo una istanza $\langle G=(V,E) \rangle$ di HC nell'istanza $\langle G'=(V',E'), s,t \rangle$ di HP, dove
  - s e t sono due nuovi nodi, ossia, $s,t \notin V$, $V' = V \cup \{s,t\}$, $E' = E \cup \{(s,u)\} \cup \{ (t,x): (u,x) \in E\}$
- Se G' contiene un percorso hamiltoniano $\langle s, u_1, u_2, \dots , u_n, t \rangle$
  - poiché $(u_i,u_{i+1}) \in E$ per ogni $i = 1, \dots , n-1$ e $u_i \neq u_j$ per $i \neq j$,
  - e poiché $(u_n, u_1) \in E$ – per costruzione di G', in quanto t è stato collegato a tutti i nodi adiacenti a u_1 in G
  - allora $\langle u_1, u_2, \dots , u_n \rangle$ è un ciclo hamiltoniano in G
- Infine, costruire $\langle G'=(V',E'), s,t \rangle$ richiede tempo polinomiale in $|\langle G=(V,E) \rangle|$
- Questo completa la prova che HC $\preccurlyeq$ HP
- E che HP è NP-completo

Il problema Long Path (LP)

- Dati un grafo non orientato G = (V,E), una coppia di nodi s e t, e un intero k ∈ ℕ, esiste in G un percorso da s a t di almeno k archi?
- Questo problema prende il nome di **Long Path** (**LP**, in breve), ed è così formalizzato:
  - $\mathfrak{I}_{LP}$ = { ⟨ G=(V,E), s, t, k ⟩ : G è un grafo non orientato ∧ s ∈ V ∧ t ∈ V ∧ k ∈ ℕ }
  - $\mathbf{S}_{LP}$(G, s, t, k) = {⟨ u_1, u_2, … , u_h⟩ : per i = 1, … , h, $u_i \in V$ }
  - $\boldsymbol{\pi}_{LP}$ (G, s, t, k, $\mathbf{S}_{LP}$(G, s, t, k))= ∃ ⟨ u_1, u_2, … , u_h⟩ ∈ $\mathbf{S}_{LP}$(G ,s, t, k) : $s = u_1 \wedge t=u_n$ ∧ ∀ i = 1, … , h-1 [$(u_i,u_{i+1}) \in E$] ∧ ∀ i,j = 1, … , n , con $i \neq j$ [$u_i \neq u_j$] ∧ $h \geq k$
- Questo problema è davvero molto simile a HP!!!!
- In effetti, la dimostrazione che LP ∈ NP è identica a quella che prova che HP ∈ NP
- A guardarlo bene, **HP è un caso particolare di LP**:
  - **un'istanza di HP è un'istanza di LP in cui k = |V|**
- Cioè, è banale ridurre polinomialmente HP a LP:
  - **trasformiamo una istanza ⟨ G=(V,E), s, t ⟩ di HP nell'istanza ⟨ G=(V,E), s, t, |V| ⟩ di LP**
- Quindi, che HP ≼ LP e LP ∈ NPC
  - anche se, in effetti, non abbiamo dimostrato che LP ∈ NP…

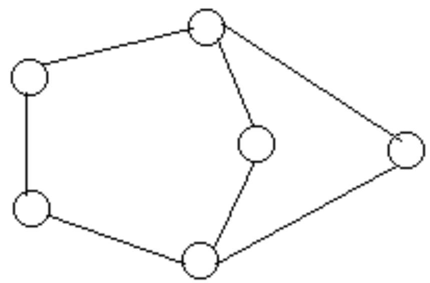
Il Travelling Salesman Problem (TSP)

- Dati un grafo non orientato **completo e pesato** $G = (V,E,w)$, dove $w: E \rightarrow \mathbb{N}$ è la funzione peso, e un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste in G un ciclo hamiltoniano tale che la somma dei pesi degli archi che lo compongono è $\leq k$?
- Questo problema prende il nome di **Travelling Salesman Problem** (problema del commesso viaggiatore, **TSP**, in breve), ed è così formalizzato:
  - $\mathfrak{I}_{TSP} = \{ \langle G=(V,E,w), k \rangle : G$ è un grafo non orientato $\wedge\ w: E \rightarrow \mathbb{N}$
    $\wedge\ (u,v) \in E$ per ogni coppia di nodi $u,v \in V \wedge k \in \mathbb{N} \}$
  - $\mathbf{S}_{TSP}(G, k) = \{\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle : n = |V| \}$
  - $\boldsymbol{\pi}_{TSP}(G, k, \mathbf{S}_{TSP}(G, k)) = \exists \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle \in \mathbf{S}_{TSP}(G, k) : \forall i,j = 1, \dots, n$, con $i \neq j\ [u_i \neq u_j] \wedge$
    $w(u_1, u_2) + w(u_2,u_3) + \dots + w(u_{n-1},u_n) + w(u_n,u_1) \leq k$

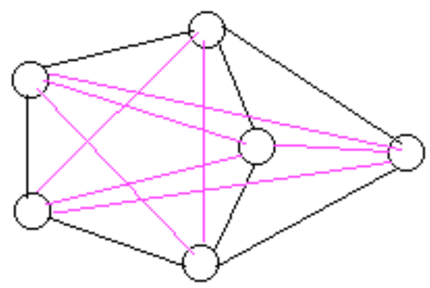
- Questo problema è molto simile a HC, ma con alcune importanti differenze:
  - G è un grafo completo: perciò di cicli hamiltoniani in G ne troviamo quanti ne vogliamo!
  - Ma a noi interessa un ciclo che "costi" poco: e qui sta il difficile…
- Tuttavia, la dimostrazione che TSP ∈ NP è molto simile a quella che prova che HC ∈ NP – e la fate per esercizio

Il Travelling Salesman Problem (TSP)

- Dimostriamo, ora, che HC $\preccurlyeq$ TSP
- Trasformiamo una istanza $\langle$ G=(V,E) $\rangle$ di HC nell'istanza $\langle$ G'=(V,E',w), k $\rangle$ di TSP, dove
  - E' è ottenuto aggiungendo ad E gli archi mancanti: $E' = E \cup \{(u,v): u,v \in V \wedge (u,v) \notin E\}$
  - la funzione peso w è così definita:
    per ogni arco di E, ossia, per ogni $(u,v) \in E$, poniamo $w(u,v)=1$,
    per ogni arco non in E, ossia, per ogni $(u,v) \notin E$, poniamo $w(u,v)=2|V|$
  - $k = |V|$



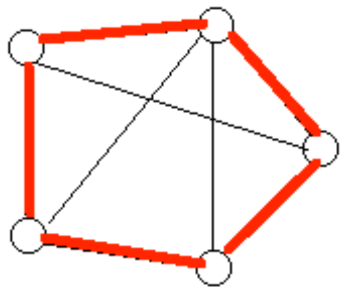
Una istanza G di HC
(G non contiene un ciclo hamiltoniano)



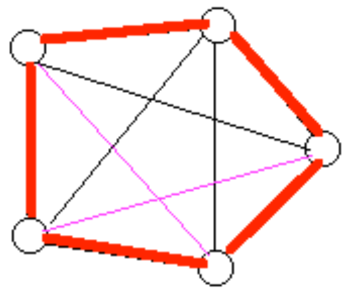
e la corrispondente istanza di TSP:
gli archi neri hanno peso 1
gli archi rosa hanno peso 2|V|=12

Il Travelling Salesman Problem (TSP)

- Dimostriamo, ora, che HC $\preccurlyeq$ TSP
- Trasformiamo ⟨ G=(V,E) ⟩ di HC nell'istanza ⟨ G'=(V,E',w), k ⟩ di TSP, dove k = |V| e
  - E' è ottenuto aggiungendo ad E gli archi mancanti: E' = E ∪ {(u,v): u,v ∈ V ∧ (u,v) ∉ E}
  - per ogni arco di E, ossia, per ogni (u,v) ∈ E, poniamo w(u,v)=1,
    per ogni arco non in E, ossia, per ogni (u,v) ∉ E, poniamo w(u,v)=2|V|
- Se G contiene un ciclo hamiltoniano, tale ciclo è anche contenuto in G':
  - esso è costituito di |V| archi contenuti in E, perciò la somma dei loro pesi in G' è |V|
  - allora, G' contiene un ciclo hamiltoniano di costo ≤ k



G contiene un ciclo hamiltoniano



G' contiene un ciclo hamiltoniano di costo k = |V| = 5

Il Travelling Salesman Problem (TSP)

- Dimostriamo, ora, che HC $\preccurlyeq$ TSP
- Trasformiamo $\langle\, G=(V,E) \,\rangle$ di HC nell'istanza $\langle\, G'=(V,E',w), k \,\rangle$ di TSP, dove $k = |V|$ e
  - E' è ottenuto aggiungendo ad E gli archi mancanti: $E' = E \cup \{(u,v): u,v \in V \wedge (u,v) \notin E\}$
  - per ogni arco di E, ossia, per ogni $(u,v) \in E$, poniamo $w(u,v)=1$,
    per ogni arco non in E, ossia, per ogni $(u,v) \notin E$, poniamo $w(u,v)=2|V|$
- Se G' contiene un ciclo hamiltoniano C tale che la somma dei pesi degli archi che lo compongono è $\leq |V|$
  - C non può contenere archi appartenenti a E'-E, perché ciascuno degli archi in E'-E ha peso $2|V|$
  - e quindi uno solo degli archi in E'- E ha peso maggiore di $k=|V|$
  - perciò, poiché il peso complessivo di C è $k = |V|$, C è costituito di soli archi contenuti in E
  - ossia, C è un ciclo hamiltoniano contenuto in G
  - cioè, G contiene un ciclo hamiltoniano
- Infine, calcolare $\langle\, G'=(V,E',w), k \,\rangle$ richiede tempo polinomiale in $|\langle\, G=(V,E) \,\rangle|$
- Questo completa la prova che HC $\preccurlyeq$ TSP

Il problema Colorabilità (COL)

- Dato un grafo non orientato G = (V,E), si vuole assegnare un colore a ciascun nodo di G in modo tale che vengano soddisfatti alcuni vincoli
- Nel problema di Colorabilità classico il vincolo che deve essere rispettato è: ***nodi adiacenti devono essere colorati con colori diversi***
  - possono essere definite, ribadiamo, tante regole diverse per colorare i nodi di un grafo
  - ma, quando non viene specificato altrimenti, ci si riferisce a questa regola
- Nel problema Colorabilità (in breve, COL) si vogliono colorare i nodi di un grafo utilizzando "pochi" colori:
- dati un grafo G = (V,E) ed un intero $k \in \mathbb{N}$ (con $k \leq |V|$), esiste una assegnazione di k colori ai nodi in V che assegni colori diversi a nodi adiacenti?
- Il problema COL è così formalizzato:
  - $\mathfrak{I}_{COL} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \wedge k \in \mathbb{N} \}$
  - $\mathbf{S}_{COL}(G, k) = \{ c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\} \}$ (una soluzione possibile è una assegnazione di uno dei k colori a ciascun nodo)
  - $\boldsymbol{\pi}_{COL}(G, k, \mathbf{S}_{COL}(G,k)) = \exists c \in \mathbf{S}_{COL}(G,k) : \forall (u,v) \in E\ [\, c(u) \neq c(v) \,]$

Il problema Colorabilità (COL)

- Dati un grafo G = (V,E) ed un intero $k \in \mathbb{N}$ (con $k \leq |V|$), esiste una assegnazione di k colori ai nodi in V che assegni colori diversi a nodi adiacenti?
  - $\mathfrak{I}_{COL} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G$ è un grafo non orientato $\wedge\ k \in \mathbb{N} \}$
  - $\mathbf{S}_{COL}(G, k) = \{ \mathtt{c}: \mathtt{V} \rightarrow \{1, 2, \dots, \mathtt{k}\} \}$
  - $\boldsymbol{\pi}_{COL}(G, k, \mathbf{S}_{COL}(G,k)) = \exists\ \mathtt{c} \in \mathbf{S}_{COL}(G,k) : \forall (u,v) \in E\ [\ c(u) \neq c(v)\ ]$

- Dimostriamo che COL ∈ NP mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale
  - Un certificato è una colorazione $\mathtt{c} : \mathtt{V} \rightarrow \{1, 2, \dots, \mathtt{k}\}$
  - per verificare che $\mathtt{c}$ è effettivamente una colorazione per G, ossia che $\mathtt{c}$ soddisfa $\boldsymbol{\pi}_{COL}(G, k, \mathbf{S}_{COL}(G,k))$, dobbiamo esaminare ciascun arco (u,v) in E e verificare che $c(u) \neq c(v)$
  - perciò, verifichiamo un certificato in tempo $O(|E|)$
  - ossia, in tempo polinomiale in $| \langle G=(V,E), k \rangle |$

Il problema k-Colorabilità (k-COL)

- Il problema k-COL è una piccola variazione di COL: **l'unica differenza è che l'intero k non è parte dell'istanza, ma costante**
- Questa sottigliezza "k nell'istanza / k costante" comporta un modo diverso di definire il problema k-COL:
- sia $k \in \mathbb{N}$ un valore costante;
  [il ; ci dice che la parte di frase che stiamo per enunciare è separata da quella che lo precede]
  dato un grafo G = (V,E), esiste una assegnazione di k colori ai nodi in V che assegni colori diversi a nodi adiacenti?
- Formalmente:
  - $\mathfrak{I}_{\mathbf{kCOL}} = \{ \langle G=(V,E) \rangle : G$ è un grafo non orientato$\}$
  - $\mathbf{S}_{\mathbf{kCOL}}(G) = \{ c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\} \}$
  - $\pi_{\mathbf{kCOL}}(G, \mathbf{S}_{\mathbf{kCOL}}(G)) = \exists\, c \in \mathbf{S}_{\mathbf{kCOL}}(G) : \forall\, (u,v) \in E\ [\, c(u) \neq c(v)\,]$
- Osserviamo che l'unica differenza fra COL e k-COL è che nelle istanze del secondo problema è sparita k...
- Ma che vuol dire?

Il problema k-Colorabilità (k-COL)

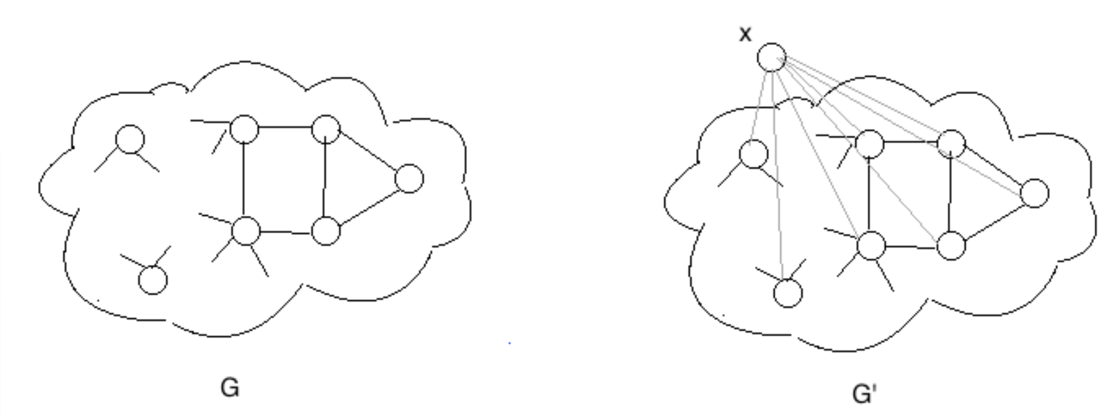
- Il problema k-COL è una piccola variazione di COL: l'unica differenza è che l'intero k non è parte dell'istanza, ma costante:
- L'unica differenza fra COL e -kCOL è che nelle istanze del secondo problema è sparita k…
- Ma che vuol dire?
  - che vogliamo colorare i nodi di un grafo con 1 colore – e avremo il problema 1-COL
  - oppure con due colori – e avremo il problema 2-COL
  - oppure con tre colori – e avremo il problema 3-COL
  - ... insomma, tanti problemi differenti!
- Che hanno una cosa in comune: *poiché sono tutti casi particolari di COL,* **tutti questi problemi appartengono a NP**
  - ed ora ce li studiamo... uno per uno!

1-COL, 2-COL e 3-COL

- Nel problema 1-COL ci si domanda se tutti i nodi possono essere colorati con lo stesso colore in modo tale che nodi adiacenti non siano colorati con lo stesso colore:
  - questo è possibile se e soltanto se nel grafo non esistono archi
  - ossia se e solo se G è un insieme indipendente
  - e questa proprietà è verificabile in tempo polinomiale
  - Perciò, 1-COL $\in$ P
- Nella dispensa 8 viene dimostrato che 2-COL $\in$ P (ma noi non lo vediamo)
  - viene dimostrato che 2-COL $\preccurlyeq$ 2SAT
  - e viene mostrato un algoritmo (deterministico) polinomiale che decide 2SAT
  - l'appartenenza a P di 2-COL segue dalla chiusura di P rispetto alla riducibilità polinomiale
- Nel paragrafo 9.5.5 viene dimostrato che 3-COL è NP-completo
  - tramite una riduzione da 3SAT
  - che noi non studiamo

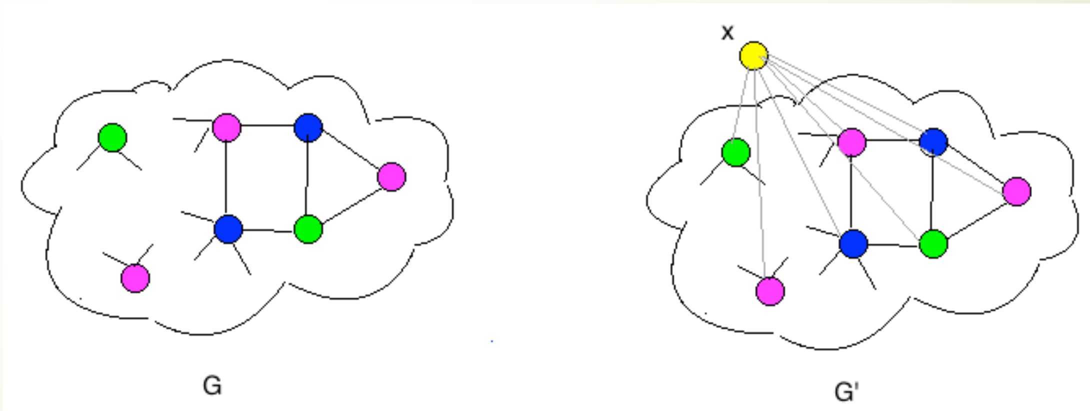
4-COL

- Nel problema 4-COL ci si domanda se i nodi di un grafo G possono essere colorati con 4 colori in modo tale che nodi adiacenti non siano colorati con lo stesso colore
  - abbiamo già visto che 4-COL $\in$ NP
- Dimostriamo ora che 4-COL è completo per NP tramite una riduzione da 3-COL
  - cioè, dimostriamo che 3-COL $\preccurlyeq$ 4-COL
- Trasformiamo una istanza G=(V,E) di 3-COL in una istanza G'=(V',E') di 4-COL:
  - V' è ottenuto aggiungendo a V un nuovo nodo x: sia $x \notin V$, allora $V' = V \cup \{x\}$
  - E' è ottenuto aggiungendo ad E gli archi che collegano x a tutti i nodi in V:
    $E' = E \cup \{ (x,u) : u \in V\}$



4-COL

- Trasformiamo una istanza G=(V,E) di 3-COL in una istanza G'=(V',E') di 4-COL:
  - V' è ottenuto aggiungendo a V un nuovo nodo x: sia $x \notin V$, allora $V' = V \cup \{x\}$
  - $E' = E \cup \{ (x,u) : u \in V\}$
- Se i nodi di G possono essere colorati con 3 colori in modo tale che nodi adiacenti non siano colorati con lo stesso colore, allora chiamiamo 1, 2 e 3 i colori e:
  - coloriamo con gli stessi colori i nodi in $V' - \{x\}$
  - coloriamo il nodo x con il colore 4
  - abbiamo colorato con 4 colori i nodi di G' in modo che nodi adiacenti hanno colori diversi
- Quindi, G' è 4-colorabile

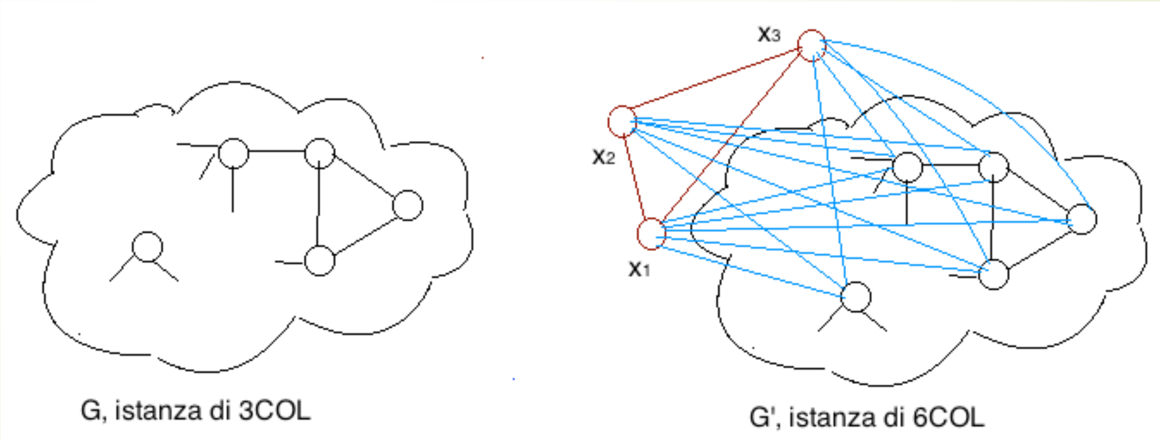


4-COL

- Trasformiamo una istanza G=(V,E) di 3-COL in una istanza G'=(V',E') di 4-COL:
  - V' è ottenuto aggiungendo a V un nuovo nodo x: sia $x \notin V$, allora $V' = V \cup \{x\}$
  - $E' = E \cup \{ (x,u) : u \in V\}$
- Se i nodi di G' possono essere colorati con 4 colori in modo tale che nodi adiacenti non siano colorati con lo stesso colore: sia **c** la funzione che 4-colora V
  - chiamiamo 4 il colore assegnato al nodo x: $\mathbf{c}(x) = 4$
  - poiché x è adiacente a tutti i nodi in V, allora il colore 4 non può essere utilizzato per colorare alcun nodo in V: per ogni $u \in V$, $\mathbf{c}(u) \in \{1,2,3\}$
  - poiché **c** è una 4-colorazione per G', allora, per ogni $u,v \in V$ tali che $(u,v) \in E$, $\mathbf{c}(u) \neq \mathbf{c}(v)$
  - ossia, **c** colora i nodi di G con 3 colori in modo che nodi adiacenti hanno colori diversi
- Quindi, G è 3-colorabile
- Poiché calcolare $\langle G'=(V',E') \rangle$ richiede tempo polinomiale in $| \langle G=(V,E) \rangle |$
- questo completa la prova che 3-COL $\preccurlyeq$ 4-COL

k-COL

- Sia k ∈ ℕ un intero fissato – fissato una volta per tutte, perciò costante
- Nel problema k-COL ci si domanda se i nodi di un grafo G possono essere colorati con k colori in modo tale che nodi adiacenti non siano colorati con lo stesso colore
  - abbiamo già visto che k-COL ∈ NP
- Dimostriamo ora che 3-COL ≼ k-COL
- Trasformiamo una istanza G=(V,E) di 3-COL in una istanza G'=(V',E') di k-COL:
  - G' è ottenuto aggiungendo a G una clique C_k di k-3 nuovi nodi x_1, ... , x_{k-3}
  - e poi aggiungendo gli archi che collegano ogni x_i a tutti i nodi in V



k-COL

- Trasformiamo una istanza G=(V,E) di 3-COL in una istanza G'=(V',E') di k-COL:
  - G' è ottenuto aggiungendo a G una clique C_k di k-3 nuovi nodi $x_1, \ldots, x_{k-3}$
  - e poi aggiungendo gli archi che collegano ogni x_i a tutti i nodi in V
- La dimostrazione che G è 3-colorabile se e soltanto se G' è k-colorabile è pressoché identica a quella di 4-COL
- se $c: V \rightarrow \{1, 2, 3\}$ è una colorazione dei nodi di G tale che, per ogni (u,v) ∈ E, $c(u) \neq c(v)$
  - allora $c': V' \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ tale che $c'(u)= c(u)$ per ogni u ∈ V e $c(x_i) = i+3$ per i= 1, … , k-3 è una colorazione dei nodi di G' tale che, per ogni (u,v) ∈ E, $c(u) \neq c(v)$,
- se $c': V' \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ è una colorazione dei nodi di G' tale che, per ogni (u,v) ∈ E, $c'(u) \neq c'(v)$
  - allora $c: V \rightarrow \{1, 2, 3\}$ tale che $c(u)= c'(u)$ per ogni u ∈ V è una colorazione dei nodi di G tale che, per ogni (u,v) ∈ E, $c(u) \neq c(v)$,
- Poiché calcolare ⟨ G'=(V',E') ⟩ richiede tempo polinomiale in | ⟨ G=(V,E) ⟩ |
- questo completa la prova che 3-COL ≼ k-COL

Infine, Colorabilità

- Ricordiamo che il problema k-COL è una piccola variazione di COL: l'unica differenza è che l'intero k non è parte dell'istanza, ma costante
- Formalmente: sia $k \in \mathbb{N}$ un valore costante
  - $\mathfrak{I}_{\mathbf{kCOL}} = \{ \langle G=(V,E) \rangle : G$ è un grafo non orientato$\}$
  - $\mathbf{S}_{\mathbf{kCOL}}(G) = \{ c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\} \}$
  - $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{kCOL}}(G, \mathbf{S}_{\mathbf{kCOL}}(G)) = \exists\, c \in \mathbf{S}_{\mathbf{kCOL}}(G) : \forall\, (u,v) \in E\ [\, c(u) \neq c(v)\,]$
- Mentre
  - $\mathfrak{I}_{\mathbf{COL}} = \{ \langle G=(V,E), k \rangle : G$ è un grafo non orientato $\wedge\, k \in \mathbb{N} \}$
  - $\mathbf{S}_{\mathbf{COL}}(G, k) = \{ c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\} \}$
  - $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{COL}}(G, k, \mathbf{S}_{\mathbf{COL}}(G,k)) = \exists\, c \in \mathbf{S}_{\mathbf{COL}}(G,k) : \forall\, (u,v) \in E\ [\, c(u) \neq c(v)\,]$

- Sappiamo che COL $\in$ NP
- Ma potrebbe mai accadere che COL $\in$ P?

Infine, Colorabilità

- Potrebbe mai accadere che COL ∈ P?
- Ragioniamo: se esistesse un algoritmo deterministico $\mathcal{A}$ che, dati un grafo G e un intero k, decidesse in tempo polinomiale se G può essere k-colorato
- allora, $\mathcal{A}$ ci permetterebbe di decidere in tempo deterministico polinomiale anche 3COL – basterebbe eseguire $\mathcal{A}(G,3)$!
- Questa osservazione ci mostra che è banale ridurre polinomialmente 3COL a COL:
  - una istanza $\langle G=(V,E) \rangle$ di 3COL è trasformata nell'istanza $\langle G=(V,E),3 \rangle$ di COL
- Ossia, 3-COL $\preccurlyeq$ COL
- E, dunque, COL è NP-completo
- In effetti, COL è una generalizzazione di 3-COL,
  - o, equivalentemente 3COL è un caso particolare di COL
  - proprio come SAT e 3SAT
- In generale: se un caso particolare di un problema è NP-completo, la generalizzazione non può essere "meno che NP-completo"...
- L'inverso, ovviamente, non è detto:
  - il caso particolare 2-COL di COL è in P, il caso particolare 3COL è NP-completo!