



Sistemi di voto



Reti e informazione

- ▶ Il materiale descritto in queste lezioni costituisce il Capitolo 23 del testo.
- ▶ In questa serie di lezioni, studiamo in che modo, e con quali esiti, sintetizzare le informazioni in possesso dei singoli individui in una rete al fine di derivare una singola informazione cumulativa
 - ▶ che permetterà di prendere una decisione fra una serie di alternative fra le quali scegliere la “migliore”
 - ▶ o stilare una graduatoria
- ▶ Cominciano questo percorso dal punto in cui eravamo rimasti al termine dello studio dei fenomeni di herding

La saggezza della folla

- ▶ Avevamo concluso la trattazione del fenomeno dell'herding osservando che una cascata imitativa può indurre decisioni sbagliate
 - ▶ ossia, non è sempre una buona idea imitare il comportamento della massa...
- ▶ Tuttavia, nel libro *The wisdom of crowd* (2004), James Surowiecki sostiene la tesi secondo la quale "il comportamento aggregato di un numero elevato di persone in possesso di informazione molto limitata può produrre risultati molto accurati"
 - ▶ l'assunzione alla base di questa affermazione è che gli individui, ciascuno in possesso di un'informazione privata, operano le loro scelte *indipendentemente* gli uni dagli altri – senza che nessuno conosca le scelte operate dagli altri
- ▶ Iniziamo la trattazione dei sistemi di voto analizzando proprio questo fenomeno
- ▶ ossia, studiando cosa accade quando un insieme di individui devono prendere una decisione di gruppo
 - ▶ ricevendo, ciascuno, un segnale privato
 - ▶ e prendendo decisioni individuali – senza, cioè osservare il comportamento degli altri individui

Un nuovo modello di decision making

- ▶ Definiamo, ora, un modello di decision making individuale:
 - ▶ 1) ogni individuo deve prendere una decisione fra due alternative: X o Y
 - ▶ Una delle due è la scelta “giusta”, l'altra quella “sbagliata”
 - ▶ e lo esprimiamo con il simbolo “>”: ad esempio, scriviamo $X > Y$ se X è la scelta giusta
 - ▶ le due alternative sono, a priori, equiprobabili: $P(X > Y) = P(Y > X) = \frac{1}{2}$
 - ▶ 2) ogni individuo riceve un segnale privato: x o y
 - ▶ $P(x | X > Y) = P(y | Y > X) = q > \frac{1}{2}$
 - ▶ 3) ogni individuo sceglie in accordo al proprio segnale privato
 - ▶ 4) ciascun individuo opera la propria scelta fra X e Y, la scrive su una scheda che poi introduce in un'urna
 - ▶ 5) infine, viene presa una decisione collettiva fra X e Y sulla base delle scelte dei singoli individui
- ▶ Come avviene nelle votazioni a scrutinio segreto

Un nuovo modello di decision making

- Come avviene nelle votazioni a scrutinio segreto
- **Teorema della giuria di Condorcet.** Nel modello di decision making appena definito, se $X > Y$ e il numero di individui coinvolti nella decisione è k allora

$$\text{quasi sicuramente } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\{i: 1 \leq i \leq k \wedge r_i = X\}|}{k} = q,$$

$$\text{ovvero, } \lim_{k \rightarrow \infty} P \left(\frac{|\{i: 1 \leq i \leq k \wedge r_i = X\}|}{k} = q \right) = 1$$

dove r_i è la scelta dell'individuo i

- Questo teorema dimostra che, **qualora si dovesse prendere una decisione collettiva in favore di X o di Y e si decidesse di decidere in accordo alla scelta della maggioranza degli individui, la decisione collettiva porterebbe a scegliere l'alternativa "giusta"**
- il che mostra come il modello di decision making appena definito sia un esempio nel quale si manifesta "la saggezza della folla" di Surowiecki

Voto non sincero

- ▶ Il **Teorema della giuria di Condorcet** è valido nel modello di decision making che abbiamo definito
 - ▶ e questo è quanto descritto nelle ipotesi
- ▶ ove è previsto che **ogni individuo sceglie in accordo al proprio segnale privato** (punto 3)
 - ▶ e questo è perfettamente ragionevole, poiché nel modello si assume che il segnale in favore della scelta "giusta" sia quello più probabile (punto 2)
- ▶ Tuttavia, vi sono situazioni nelle quali un individuo può ritenere migliore la scelta in disaccordo al suo segnale privato
 - ▶ pur nella ipotesi di cui al punto 2)
- ▶ e questo lo abbiamo già visto nel caso dell'herding
 - ▶ cioè, nel caso in cui le scelte erano prese anche osservando il comportamento altrui
- ▶ Vediamo, ora, come il voto "non sincero" (ossia, una scelta in disaccordo con il proprio segnale privato) abbia senso anche quando si debba prendere una decisione collettiva e *ciascun individuo scelga **senza** osservare gli altri*
- ▶ ossia, casi in cui il voto non sincero di un individuo può massimizzare la probabilità che la scelta collettiva sia quella "giusta"

Voto non sincero

- ▶ ESEMPIO: torniamo al gioco delle due urne
 - ▶ questa volta, però, abbiamo:
 - un'urna UG contenente 10 palline gialle
 - un'urna UV contenente 9 palline verdi e una pallina gialla
 - ▶ come nel gioco delle due urne, scegliamo a caso un'urna fra UG e UV
 - ossia $P(UG) = P(UV) = \frac{1}{2}$
 - ▶ e le regole del gioco sono un po' diverse:
 - ▶ abbiamo 3 giocatori, ciascuno dei quali estrae in segreto una pallina dall'urna scelta (e ve la reinserisce)
 - ▶ dopo che i 3 giocatori hanno estratto ciascuno una pallina, *simultaneamente* dichiarano ciascuno la propria scelta: UG o UV
 - ▶ se la maggioranza ha indovinato di quale urna si tratti, tutti e 3 vincono un premio
 - ▶ altrimenti nessuno vince
- ▶ Osserviamo: le differenze sostanziali con il gioco delle due urne che abbiamo visto in precedenza sono:
 - ▶ le risposte simultanee (invece che sequenziali)
 - ▶ e una decisione collettiva (a maggioranza) in cui tutti vincono o tutti perdono

Voto non sincero

- ▶ ESEMPIO: il gioco UG / UV

- ▶ consideriamo la strategia di un giocatore rispetto al suo segnale privato:

- ▶ se estrae una pallina gialla, allora

$$P(UG | g) = \frac{P(g|UG) \cdot P(UG)}{P(g|UG) \cdot P(UG) + P(g|UV) \cdot P(UV)} = \frac{\frac{10}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{10}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{10}{11}$$

- ▶ ma, se estrae una pallina verde, allora (senza stare a fare tanti conti) $P(UV | v) = 1$

- ▶ ossia, l'urna è *certamente* verde

- ▶ Ora, proviamo a metterci nei panni di uno dei giocatori per capire quale ragionamento possa fare per rispondere in modo da massimizzare la probabilità di vincere:
 - ▶ io giocatore so che noi tre giocatori vinciamo se almeno due di noi indovinano.
 - ▶ Quindi mi domando: in quale caso la mia risposta è *davvero influente* ai fini della vittoria?
 - ▶ E la risposta è: quando le risposte degli altri due giocatori sono discordi
 - ▶ perché, se sono concordi, allora la mia risposta non modifica la maggioranza, qualunque cosa io risponda.

Voto non sincero

► ESEMPIO: il gioco UG / UV

- Io giocatore so che noi tre giocatori vinciamo se almeno due di noi indovinano.
- E che la mia risposta è influente solo quando le risposte degli altri due giocatori sono discordi
- Ma se le risposte dei due giocatori sono discordi, allora uno di essi ha risposto UV
- ossia, *assumendo che gli altri due giocatori rispondano sinceramente*
ossia *in accordo ai loro segnali privati*
le risposte degli altri due giocatori sono discordi quando uno di loro estrae una pallina verde
- ossia, quando l'urna è UV
- Perciò, *assumendo che gli altri due giocatori rispondano sinceramente*, la mia risposta è influente ai fini della vittoria solo quando l'urna è UV
- e, quindi, qualunque pallina io estragga, mi conviene rispondere UV!

- E se, invece, *gli altri due giocatori non rispondono sinceramente*, magari ragionando come ho ragionato io? Beh, la strategia di vittoria va a farsi friggere...

Voto non sincero nelle giurie - unanimità

- ▶ Una situazione simile si presenta nelle giurie, durante i processi
 - ▶ quando si deve decidere se un imputato è colpevole (C) o innocente (I)
 - ▶ e, a priori, $P(C) = P(I) = \frac{1}{2}$
 - ▶ ciascun giurato riceve un segnale c o un segnale i: come nel caso dell'herding,
 $P(c | C) = P(i | I) = q > \frac{1}{2}$
 - ▶ in questo caso, occorre aggregare i voti dei giurati per giungere a un verdetto di colpevolezza o di innocenza
 - ▶ e per condannare un imputato è necessario che l'insieme S dei segnali ricevuti dai giurati siano indice di colpevolezza con probabilità molto alta
 - ▶ non è sufficiente che sia $P(C | S) > \frac{1}{2}$
 - ▶ ma è richiesto che sia $P(C | S) \gg \frac{1}{2}$
 - ▶ *oltre ogni ragionevole dubbio*
 - ▶ diciamo che per condannare un imputato è necessario che tutti i giurati votino in favore della condanna
 - ▶ ossia, per condannare l'imputato occorre l'unanimità dei giurati

Voto non sincero nelle giurie - unanimità

- ▶ In questo caso, se io sono un giurato: in quale situazione la mia risposta è davvero influente ai fini del verdetto?
 - ▶ Se fra gli altri giurati c'è qualcuno che è in favore dell'innocenza, che io voti per la colpevolezza o per l'innocenza non altera il verdetto
 - ▶ ma se tutti gli altri giurati sono in favore della colpevolezza, allora è proprio dal mio voto che dipende il verdetto!
- ▶ Supponiamo che la giuria consti di k giurati e che tutti (tranne me) votino in accordo ai propri segnali
 - ▶ calcoliamo la probabilità $P(C | ic^{k-1})$ che l'imputato sia colpevole quando un solo giurato riceve un segnale i :
$$P(C | ic^{k-1}) = \frac{P(ic^{k-1}|C) \cdot P(C)}{P(ic^{k-1}|C) \cdot P(C) + P(ic^{k-1}|I) \cdot P(I)} = \frac{(1-q) q^{k-1} \cdot \frac{1}{2}}{(1-q) q^{k-1} \cdot \frac{1}{2} + q (1-q)^{k-1} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{q^{k-2}}{q^{k-2} + (1-q)^{k-2}}$$
 - ▶ e, dunque, $\lim_{k \rightarrow \infty} P(C | ic^{k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{1-q}{q}\right)^{k-2}} = 1$ perché $q > \frac{1}{2}$ e, quindi, $\frac{1-q}{q} < 1$
 - ▶ ossia, al crescere del numero dei giurati, se uno solo di essi riceve il segnale i allora l'imputato è colpevole quasi sicuramente
- ▶ E, allora, è meglio che io voti "colpevole"
 - ▶ con buona pace dell' "oltre ogni ragionevole dubbio"...

Sistemi di voto

- ▶ Fino ad ora abbiamo considerato due metodi per ottenere una decisione collettiva a partire da un insieme di decisioni individuali
 - ▶ la maggioranza
 - ▶ l'unanimità (per una delle due alternative)
- ▶ nel caso in cui le alternative fra le quali scegliere fossero due
- ▶ In generale, comunque, ci vengono presentate più alternative fra le quali esprimere le nostre preferenze
 - ▶ come succede, ad esempio, nel corso delle elezioni politiche
 - ▶ o al festival di Sanremo...
- ▶ E spesso più che decretare semplicemente il vincitore, viene stilata una classifica
 - ▶ ossia, un *ranking*
- ▶ E, infine, naturalmente, possono essere considerate numerose *regole per derivare una decisione collettiva a partire da un insieme di decisioni individuali*
 - ▶ oltre alle regole della maggioranza e dell'unanimità
- ▶ ed esse prendono il nome di **sistemi di voto**

Voto individuale

► Formalizziamo:

► $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$ è un insieme di alternative (o, più semplicemente, $A = [n]$)

► $V = \{ v_1, v_2, \dots, v_k \}$ è un insieme di votanti (o, più semplicemente, $V = [k]$)

► Ciascun votante $v_h \in V$ esprime il suo voto in una di due forme possibili:

► 1) nella forma di una **graduatoria (ranking)** $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, \dots, a_{hn} \rangle$,

► ossia come sequenza ordinata delle n alternative

► nella quale al primo posto si trova l'alternativa preferita fra tutte, al secondo posto la seconda preferita, ecc. ecc.

► Un ranking è, dunque, un elemento dell'insieme $\Pi(A)$, ossia, l'insieme delle permutazioni degli elementi di A

► 2) nella forma di una **relazione binaria completa e transitiva** $>_h$

► completa: per ogni coppia di alternative a e a' , $a >_h a'$ oppure $a' >_h a$

► transitiva: se $a >_h a'$ e $a' >_h a''$ allora $a >_h a''$, per qualunque terna di alternative a, a', a''

► dove $a >_h a'$ significa che a è preferito ad a' dal votante h

Voto individuale

- ▶ Le due forme possibili di espressione di un voto sono fra loro equivalenti.
- ▶ Derivare una relazione binaria completa e transitiva $>_h$ da un ranking $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, \dots, a_{hn} \rangle$ è immediato: per ogni indice $i \in [n]$ e per ogni indice $j \in [n]$ tale che $j > i$, poniamo $a_{hi} >_h a_{hj}$
- ▶ Derivare un ranking $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, \dots, a_{hn} \rangle$ da una relazione binaria completa e transitiva $>_h$ è, invece, un compito più complesso
 - ▶ Allo scopo, procediamo come segue
 - ▶ poiché $>_h$ è completa e transitiva, allora esiste $\ell \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{\ell\}$, $|\{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\}| > |\{i \in [n]: a_j >_h a_i\}|$
 - ▶ Lemma 1, dimostrato nelle slide successive
 - ▶ allora, per ogni $j \in [n] - \{\ell\}$, $a_\ell >_h a_j$
 - ▶ Lemma 2, dimostrato nelle slide successive
 - ▶ allora, poniamo $a_{h1} = a_\ell$
 - ▶ osservando che $>_h$ è completa e transitiva anche sull'insieme $A - \{a_{h1}\}$
 - ▶ ripetiamo il ragionamento sull'insieme $A - \{a_{h1}\}$ per individuare a_{h2} , e così via per individuare a_{h3}, \dots, a_{hn}

Voto individuale

- ▶ **Lemma 1:** se $>_h$ è una relazione binaria completa e transitiva nell'insieme $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, allora esiste $\ell \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{\ell\}$,
$$|\{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\}| > |\{i \in [n]: a_j >_h a_i\}|$$

- ▶ Dimostrazione:

- ▶ per ogni alternativa $j \in [n]$, indichiamo con p_j il numero di alternative che j batte nel voto del votante h : $p_j = |\{i \in [n]: a_j >_h a_i\}|$
- ▶ certamente, esiste $\ell \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{\ell\}$,

$$p_\ell = |\{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\}| \geq |\{i \in [n]: a_j >_h a_i\}| = p_j \quad (*)$$

- ▶ perché p_1, p_2, \dots, p_n sono numeri!

- ▶ supponiamo che esista $m \in [n] - \{\ell\}$ tale che

$$|\{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\}| = |\{i \in [n]: a_m >_h a_i\}| \text{ - ossia, } p_\ell = p_m$$

Voto individuale

- **Lemma 1:** se $>_h$ è una relazione binaria completa e transitiva nell'insieme $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, allora esiste $\ell \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{\ell\}$,
 $|\{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\}| > |\{i \in [n]: a_j >_h a_i\}|$

- Dimostrazione:

- supponiamo che esista $m \in [n] - \{\ell\}$ tale che

$$p_\ell = |\{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\}| = |\{i \in [n]: a_m >_h a_i\}| = p_m$$

- poiché $>_h$ è completa, allora $a_\ell >_h a_m$ oppure $a_m >_h a_\ell$

- **1) se $a_m >_h a_\ell$:** poiché $>_h$ è transitiva allora, per ogni j tale che $a_\ell >_h a_j$ si ha che $a_m >_h a_j$

- ossia $\{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\} \cup \{a_\ell\} \subseteq \{i \in [n]: a_m >_h a_i\}$

- e quindi, poiché $a_\ell \notin \{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\}$,

$$p_m = |\{i \in [n]: a_m >_h a_i\}| \geq |\{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\}| + 1 > |\{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\}| = p_\ell$$

- un assurdo: $p_\ell = p_m$ e $p_m > p_\ell$

Voto individuale

- **Lemma 1:** se $>_h$ è una relazione binaria completa e transitiva nell'insieme $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, allora esiste $\ell \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{\ell\}$,
 $|\{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\}| > |\{i \in [n]: a_j >_h a_i\}|$

- Dimostrazione:

- supponiamo che esista $m \in [n] - \{\ell\}$ tale che

$$p_\ell = |\{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\}| = |\{i \in [n]: a_m >_h a_i\}| = p_m$$

- **2) se $a_\ell >_h a_m$:** poiché $>_h$ è transitiva allora, per ogni j tale che $a_m >_h a_j$ si ha che $a_\ell >_h a_j$

- ossia $\{i \in [n]: a_m >_h a_i\} \cup \{a_m\} \subseteq \{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\}$

- e quindi, poiché $a_m \notin \{i \in [n]: a_m >_h a_i\}$,

$$p_\ell = |\{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\}| \geq |\{i \in [n]: a_m >_h a_i\} \cup \{a_m\}| > |\{i \in [n]: a_m >_h a_i\}| = p_m$$

- un assurdo: $p_\ell = p_m$ e $p_\ell > p_m$

- In entrambi i casi, $a_m >_h a_\ell$ e $a_m >_h a_\ell$, viene contraddetto quanto supposto circa m

- e quindi m non esiste e, per ogni $j \in [n] - \{\ell\}$, $|\{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\}| > |\{i \in [n]: a_j >_h a_i\}|$

QED

Voto individuale

- ▶ **Lemma 2:** se $>_h$ è una relazione binaria completa e transitiva nell'insieme $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e sia $\ell \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{\ell\}$,
 $|\{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\}| > |\{i \in [n]: a_j >_h a_i\}|$.
Allora, per ogni $j \in [n] - \{\ell\}$, $a_\ell >_h a_j$

- ▶ Dimostrazione:

- ▶ osserviamo che $\ell \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{\ell\}$,
 $|\{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\}| > |\{i \in [n]: a_j >_h a_i\}|$
esiste in virtù del Lemma 1
- ▶ supponiamo che esista esista $m \in [n] - \{\ell\}$ tale che $a_m >_h a_\ell$
- ▶ allora, per la transitività di $>_h$, per ogni j tale che $a_\ell >_h a_j$ si avrebbe che $a_m >_h a_j$
- ▶ ossia, $\{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\} \cup \{a_\ell\} \subseteq \{i \in [n]: a_m >_h a_i\}$
- ▶ e quindi, poiché $a_\ell \notin \{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\}$, $|\{i \in [n]: a_m >_h a_i\}| > |\{i \in [n]: a_\ell >_h a_i\}|$
- ▶ un assurdo. QED

Sistemi di voto

- ▶ Un sistema di voto è una regola che permette di associare un voto collettivo ad un insieme di voti individuali
- ▶ Formalmente:
 - ▶ poiché sono irrilevanti i nomi delle alternative e dei votanti, possiamo identificare A con l'insieme $[n]$ e V con l'insieme $[k]$
 - ▶ per fissare le idee, assumiamo che i k votanti esprimano i loro voti mediante ranking
 - ▶ un *voto aggregato per n alternative e k votanti* è una funzione $f_{n,k}: \Pi([n])^k \rightarrow \Pi([n])$
 - ▶ in modo che $f_{n,k}(r_1, r_2, \dots, r_k) = r$, dove $r_1, r_2, \dots, r_k, r \in \Pi([n])$
- ▶ Un **sistema di voto** è un predicato σ che specifica, per ogni $r_1, r_2, \dots, r_k \in \Pi([n])^k$, le regole che devono essere rispettate dal voto aggregato $f_{n,k}(r_1, r_2, \dots, r_k)$
- ▶ ESEMPIO: supponiamo che i voti individuali dei k votanti siano espressi mediante relazioni binarie $>_1, >_2, \dots, >_k$ e indichiamo con $>$ la relazione binaria $f_{n,k}(>_1, >_2, \dots, >_k)$
(ossia, $>$ è il voto collettivo corrispondente a $>_1, >_2, \dots, >_k$)
 - ▶ il **sistema di voto a maggioranza** è descritto dal predicato σ_M tale che,
$$\sigma_M(>_1, >_2, \dots, >_k, >) = \forall i \in [n] \forall j \in [n] \left[i > j \leftrightarrow |\{h \in [k]: i >_h j\}| > |\{h \in [k]: j >_h i\}| \right]$$

nella votazione finale i è preferito a j se e solo se i è preferito a j dalla maggioranza dei votanti

Sistema di voto a maggioranza

- ▶ Il **sistema di voto a maggioranza** è un sistema di voto semplice e intuitivo
- ▶ in particolar modo quando le alternative fra le quali scegliere sono due
- ▶ tuttavia, quando le alternative sono più di due...
 - ▶ Consideriamo la situazione seguente: tre amici in vacanza, con budget limitato, devono scegliere se acquistare miele, marmellata o cioccolata per la colazione
 - ▶ Mario preferisce su tutto la cioccolata, poi la marmellata, e in ultimo il miele:
cioccolata $>_M$ marmellata $>_M$ miele
 - ▶ Paolo preferisce su tutto la marmellata, poi il miele, e in ultimo la cioccolata:
marmellata $>_P$ miele $>_P$ cioccolata
 - ▶ Roberto preferisce su tutto il miele, poi la cioccolata, e in ultimo la marmellata:
miele $>_R$ cioccolata $>_R$ marmellata
 - ▶ tre relazioni binarie complete e transitive!

Sistema di voto a maggioranza

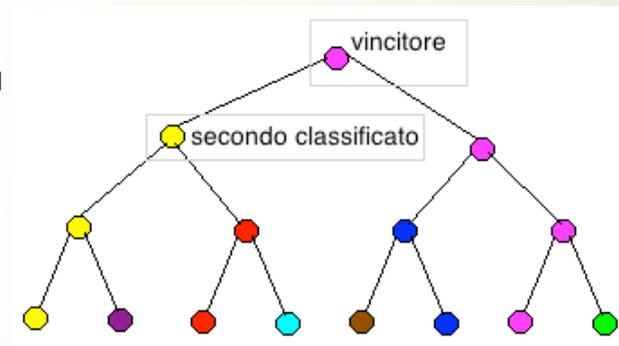
- ▶ Quando le alternative sono più di due...
 - ▶ Mario preferisce su tutto la cioccolata, poi la marmellata, e in ultimo il miele:
cioccolata $>_M$ marmellata $>_M$ miele
 - ▶ Paolo preferisce su tutto la marmellata, poi il miele, e in ultimo la cioccolata:
marmellata $>_P$ miele $>_P$ cioccolata
 - ▶ Roberto preferisce su tutto il miele, poi la cioccolata, e in ultimo la marmellata:
miele $>_R$ cioccolata $>_R$ marmellata
 - ▶ tre relazioni binarie complete e transitive!
- ▶ Tuttavia, se proviamo a produrre una relazione binaria $>$ aggregando secondo la regola della maggioranza le tre relazioni otteniamo:
 - cioccolata è preferita a marmellata da due votanti → **cioccolata $>$ marmellata**
 - marmellata è preferita a miele da due votanti → **marmellata $>$ miele**
 - miele è preferito a cioccolata da due votanti → **miele $>$ cioccolata**
- ▶ Ossia, cioccolata $>$ marmellata $>$ miele $>$ cioccolata (!!!!!)
- ▶ e, in particolare, anche se cioccolata $>$ marmellata e marmellata $>$ miele
non è vero che cioccolata $>$ miele
- ▶ **La relazione $>$ non è transitiva!**

Sistema di voto a maggioranza

- ▶ La situazione appena descritta costituisce **il paradosso di Condorcet**: *anche se le relazioni binarie individuali sono transitive, la relazione binaria collettiva ottenuta dalla loro aggregazione può non essere transitiva*
- ▶ Osserviamo che la richiesta di transitività è necessaria affinché l'aggregazione dei voti individuali sia significativa
 - ▶ se non è soddisfatta, il voto aggregato non ha significato
 - ▶ è il... "minimo sindacale" delle richieste!
- ▶ perciò potrebbe essere problematico usare con più di due alternative il **sistema di voto a maggioranza**
 - ▶ che soffre del paradosso di Condorcet
- ▶ Il sistema di voto a maggioranza può essere utilizzato come punto di partenza per costruire un nuovo sistema di voto che non soffre del paradosso di Condorcet: il torneo
 - ▶ che è il sistema di voto utilizzato nelle manifestazioni sportive
- ▶ i k votanti esprimono ancora le proprie preferenze mediante relazioni binarie
- ▶ tuttavia, la graduatoria finale viene costruita sulla base di una successione di scontri diretti

Il torneo

- ▶ In un torneo i k votanti esprimono ancora le proprie preferenze mediante relazioni binarie: $>_1, >_2, \dots, >_k$
- ▶ e la graduatoria finale viene costruita sulla base di una successione di scontri diretti:
 - ▶ **se** si scontrano le due alternative a e a' , risulterà $a > a'$ se $|\{i \in [k]: a >_i a'\}| > |\{i \in [k]: a' >_i a\}|$
 - ▶ Ovviamente, se k è dispari allora per ogni coppia di alternative a e a' si avrà $a > a'$ o $a' > a$
 - ▶ ossia, si riuscirà sempre ad avere un vincitore di uno scontro diretto
- ▶ In un torneo non hanno luogo tutti gli scontri possibili, ma solo quelli fissati da un'agenda
 - ▶ ossia, prima dell'inizio del torneo vengono fissate le coppie che devono confrontarsi
 - ▶ poi si scontreranno i vincitori di ciascuno scontro, e così via, fino a decretare il vincitore e il secondo classificato
 - ▶ per comporre il resto della graduatoria saranno necessari altri incontri



Il torneo

- ▶ In un torneo non hanno luogo tutti gli scontri possibili, ma solo quelli fissati da un'agenda
- ▶ e, quindi, **l'agenda può avere un ruolo determinante nel decretare il vincitore**
- ▶ ESEMPIO: torniamo ai tre amici in vacanza, alle prese con la decisione di cosa acquistare per la colazione – problema che decidono di risolvere con un torneo
 - ▶ Mario propone l'agenda secondo la quale il primo scontro è marmellata-miele, e il vincitore si scontrerà con la cioccolata
 - ▶ Paolo propone l'agenda secondo la quale il primo scontro è miele-cioccolata, e il vincitore si scontrerà con la marmellata
 - ▶ Roberto propone l'agenda secondo la quale il primo scontro è cioccolata-marmellata, e il vincitore si scontrerà con il miele
 - ▶ poiché avevamo già osservato che **cioccolata > marmellata** , **marmellata > miele** e **miele > cioccolata**,
 - ▶ nell'agenda di Mario vince la cioccolata, nell'agenda di Paolo vince la marmellata e nell'agenda di Roberto vince il miele
 - ▶ ossia, ciascun amico ha proposto un'agenda che portasse alla vittoria il proprio prodotto preferito!
- ▶ Ossia, il sistema di voto "torneo" è sensibile allo **strategic agenda setting**

Sistemi di voto posizionali

- ▶ Supponiamo ora che i voti individuali siano espressi mediante ranking
 - ▶ così che il voto del votante h è $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, \dots, a_{hn} \rangle$
- ▶ A ciascun ranking r_h possiamo associare una funzione peso che assegna un valore numerico a ciascuna alternativa dipendentemente dalla sua *posizione* nel ranking
 - ▶ ad esempio, al ranking $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, \dots, a_{hn} \rangle$ possiamo associare la funzione w_h tale che $w_h(a_{hi}) = 100 - 10 \cdot i$
 - ▶ tipicamente, la funzione peso è decrescente nella posizione
 - ▶ il peso assegnato all'alternativa in posizione i è maggiore del peso assegnato all'alternativa in posizione $i+1$
- ▶ In un sistema di voto posizionale,
 - ▶ dopo aver associato, per ogni $h \in [k]$, una funzione peso w_h al ranking r_h ,
 - ▶ il ranking collettivo r è ottenuto
 - ▶ calcolando il peso totale di ciascuna alternativa come somma dei pesi che quella alternativa ha negli h ranking – ossia, per ogni $a \in [n]$, $w(a) = \sum_{1 \leq h \leq k} w_h(a)$
 - ▶ e poi ordinando le alternative secondo il loro peso totale per ottenere il ranking collettivo

Sistemi di voto posizionali

- ▶ In un sistema di voto posizionale,
 - ▶ dopo aver associato, per ogni $h \in [k]$, una funzione peso w_h al ranking r_h ,
 - ▶ funzione peso decrescente nella posizione in graduatoria
- ▶ il ranking collettivo r è ottenuto
 - ▶ calcolando il peso totale di ciascuna alternativa come somma dei pesi che quella alternativa ha negli h ranking – ossia, per ogni $a \in [n]$, $w(a) = \sum_{1 \leq h \leq k} w_h(a)$
 - ▶ e poi ordinando le alternative secondo il loro peso totale per ottenere il ranking collettivo
- ▶ Il **Borda Count** è un particolare sistema di voto posizionale nel quale
 - ▶ per ogni $h \in [k]$, la funzione peso associata al ranking $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, \dots, a_{hn} \rangle$ è la funzione suriettiva $\rho_h: A \rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\}$ tale che $\rho_h(a_{hi}) = n - i$,
 - ▶ e le alternative vengono ordinate per peso finale ρ non crescente

Sistemi di voto posizionali

- ▶ Anche nei sistemi di voto posizionali si manifesta il paradosso di Condorcet, sotto forma di *ex aequo*
- ▶ ESEMPIO: consideriamo, ancora i tre amici in vacanza e i tre ranking corrispondenti alle loro relazioni di equivalenza ed applichiamo il Borda Count:
 - ▶ $r_{\text{Mario}} = \langle \text{cioccolata}, \text{marmellata}, \text{miele} \rangle$ da cui
 $\rho_{\text{Mario}}(\text{cioccolata}) = 2, \quad \rho_{\text{Mario}}(\text{marmellata}) = 1, \quad \rho_{\text{Mario}}(\text{miele}) = 0$
 - ▶ $r_{\text{Paolo}} = \langle \text{marmellata}, \text{miele}, \text{cioccolata} \rangle$ da cui
 $\rho_{\text{Paolo}}(\text{cioccolata}) = 0, \quad \rho_{\text{Paolo}}(\text{marmellata}) = 2, \quad \rho_{\text{Paolo}}(\text{miele}) = 1$
 - ▶ $r_{\text{Roberto}} = \langle \text{miele}, \text{cioccolata}, \text{marmellata} \rangle$ da cui
 $\rho_{\text{Roberto}}(\text{cioccolata}) = 1, \quad \rho_{\text{Roberto}}(\text{marmellata}) = 0, \quad \rho_{\text{Roberto}}(\text{miele}) = 2$
 - ▶ e, quindi $\rho(\text{cioccolata}) = 3, \rho(\text{marmellata}) = 3, \rho(\text{miele}) = 3$
- ▶ In un sistema di voto posizionale il problema degli *ex aequo* viene trattato
 - ▶ dividendo i premi – nelle competizioni
 - ▶ ricorrendo ai ballottaggi – nelle elezioni politiche
 - ▶ ricorrendo al lancio di una moneta
 - ▶ ...
 - ▶ ma non ci occupiamo di queste questioni

Sistemi di voto posizionali

- ▶ Invece, ci occupiamo di un'altra caratteristica indesiderabile dei sistemi di voto posizionali che introduciamo mediante un esempio
- ▶ ESEMPIO: cinque critici cinematografici devono scegliere se assegnare un premio cinematografico a uno dei due film "Il padrino" e "Via col vento"
 - ▶ tre critici preferiscono "Via col vento" (VV), i rimanenti due "il padrino" (IP)
 - ▶ e, quindi, il premio andrebbe a "Via col vento"
 - ▶ prima di arrivare alla votazione finale, però, il comitato organizzatore del premio cinematografico decide di inserire fra i candidati anche "Pulp fiction" (PF)
 - ▶ ciascuno dei cinque critici ritiene che "Pulp fiction" sia decisamente inadatto alla competizione
 - ▶ tuttavia, i due critici che preferiscono "Il padrino" a "Via col vento" si accorgono che possono ricorrere a un espediente:
 - ▶ possono, cioè, votare entrambi secondo il seguente ranking: $\langle IP, PF, VV \rangle$
 - ▶ mentre i tre critici che preferiscono "Via col vento" votano, onestamente: $\langle VV, IP, PF \rangle$
 - ▶ così che $\rho(VV) = 6$, $\rho(IP) = 7$ e $\rho(PF) = 2$
 - ▶ e il premio va a "Il padrino"

Rilevanza delle alternative irrilevanti

- Inserendo in posizione opportuna “Pulp fiction”, il film che mai avrebbe vinto, i due critici che preferivano “Il padrino” hanno fatto in modo che esso vincessesse
- E, per farlo, hanno classificato l'**alternativa irrilevante** ai fini della vittoria in posizione intermedia che non corrispondeva al loro giudizio
 - mentre, se avessero votato onestamente $\langle IP, VV, PF \rangle$
 - avrebbe vinto “Via col vento”
- Riconsideriamo ora i ranking dei due gruppi di critici: $\langle VV, IP, PF \rangle$ e $\langle IP, PF, VV \rangle$
- Osserviamo che, se ci limitiamo ad osservare le posizioni relative di VV e IP nei due ranking, **VV precede IP nella maggioranza dei votanti**
- e quindi sarebbe ragionevole aspettarsi che questo ordine venga rispettato nel voto collettivo
 - indipendentemente da come viene posizionato PF
- Invece, il posizionamento opportuno di PF da parte di due votanti ha permesso di modificare le posizioni relative di VV e IP nella graduatoria finale
- e questo è un problema (di cui soffrono i sistemi di voto posizionali)



Sistemi di voto affidabili

- ▶ Fino a questo momento abbiamo incontrato tre sistemi di voto, quello a maggioranza, il torneo e il sistema di voto posizionale, dei quali non possiamo fidarci completamente
 - ▶ perché non riescono sempre ad individuare una graduatoria finale
 - ▶ perché la graduatoria finale dipende dall'ordinamento iniziale delle alternative
 - ▶ perché i votanti possono “barare” per orientare la graduatoria finale
- ▶ Ci domandiamo, a questo punto, se sia possibile progettare sistemi di voto affidabili
- ▶ Ma *quando* un sistema di voto può essere considerato affidabile?
- ▶ Come minimo, per essere considerato affidabile, un sistema di voto dovrebbe garantire
 - ▶ di rappresentare le scelte di tutti i votanti nel caso in cui esse siano tutte concordi
 - ▶ di non consentire l'utilizzo di alternative irrilevanti per orientare la graduatoria finale



Sistemi di voto affidabili

- ▶ Come minimo, per essere considerato affidabile, un sistema di voto dovrebbe garantire
 - ▶ di rappresentare le scelte di tutti i votanti nel caso in cui esse siano tutte concordi
 - ▶ di non consentire l'utilizzo di alternative irrilevanti per orientare la graduatoria finale
- ▶ E il paradosso di Condorcet? Non ci interessa più garantire che un sistema di voto non soffra di tale anomalia?!
- ▶ Sì e no, in effetti...
- ▶ Nel senso che **nei sistemi di voto che prenderemo in considerazione il voto aggregato (o collettivo) viene descritto mediante un ranking**
 - ▶ e *un ranking corrisponde sempre ad una relazione binaria transitiva*
 - ▶ e, per inciso, per poter produrre un ranking potrebbe essere necessario introdurre anche una regola che risolva gli ex aequo
- ▶ Pertanto, per così dire, il paradosso di Condorcet viene eliminato alla radice

Due principi per i sistemi di voto

- ▶ Sia σ un sistema di voto
 - ▶ sia $[n]$ un insieme di alternative e sia $[k]$ un insieme di votanti tali che, per ogni $h \in [k]$, il votante h esprime il ranking $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, \dots, a_{hn} \rangle$ sulle n alternative
 - ▶ indichiamo con r il voto collettivo corrispondente ai voti individuali r_1, r_2, \dots, r_k derivato in accordo a σ – ossia, $\sigma(r_1, r_2, \dots, r_k, r) = \text{vero}$
 - ▶ e siano, per ogni $h \in [k]$, ρ_h la funzione peso (relativa al Borda Count) associata a r_h e ρ la funzione peso associata a r

- ▶ **Principio di Unanimità (U)**: il sistema di voto σ soddisfa il principio di unanimità se

$$\forall i, j \in [n] [\forall h \in [k] \rho_h(i) > \rho_h(j) \rightarrow \rho(i) > \rho(j)]$$

- ▶ cioè: ogni qualvolta **tutti** i votanti preferiscono un'alternativa i a un'alternativa j , allora i è preferita a j anche nella graduatoria finale

Due principi per i sistemi di voto

- Sia σ un sistema di voto
- **Principio di Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti (IIA)**: il sistema di voto σ soddisfa il principio di indipendenza dalle alternative irrilevanti se

$$\forall i, j \in [n] \quad \forall (r_1, r_2, \dots, r_k), (r'_1, r'_2, \dots, r'_k) \in \Pi([n])^k$$

$$\left[\left[\forall h \in [k] \rho_h(i) > \rho_h(j) \leftrightarrow \rho'_h(i) > \rho'_h(j) \right] \rightarrow \left[\rho(i) > \rho(j) \leftrightarrow \rho'(i) > \rho'(j) \right] \right]$$

- dove ρ' la funzione peso associata al ranking collettivo corrispondente a $(r'_1, r'_2, \dots, r'_k)$ derivata in accordo a σ
- cioè: ogni qualvolta si considerino due insiemi di k votanti per i quali due alternative i e j hanno le stesse posizioni relative per **tutte** le coppie di votanti *omologhi*, allora i e j hanno la stessa posizione relativa anche nelle graduatorie finali relative ai due gruppi di votanti
- ovvero: **la posizione relativa di due alternative nella graduatoria finale dipende unicamente dalle posizioni relative delle due alternative nelle graduatorie individuali**

Il teorema (di impossibilità) di Arrow

- ▶ Il teorema di Arrow individua l'unico sistema di voto che rispetta i principi U e IIA
- ▶ **Teorema di Arrow.** Se il sistema di voto σ soddisfa i principi U e IIA, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > 2$ esiste $j \in [k]$ tale che, per ogni k-upla $\langle r_1, r_2, \dots, r_k \rangle$ di ranking per n alternative, ciascuno dei ranking espressione di voto di uno dei k votanti il voto collettivo corrispondente ai voti individuali r_1, r_2, \dots, r_k derivato in accordo a σ è $r = r_j$
- ▶ Riassumiamo: per ogni insieme $[k]$ di votanti esiste $j \in [k]$ tale che il voto collettivo corrispondente ai voti individuali r_1, r_2, \dots, r_k dei k votanti derivato in accordo a σ è $r = r_j$
- ▶ per ogni insieme $[k]$ di votanti esiste $j \in [k]$ tale che $r = r_j$
- ▶ cioè, l'unico sistema di voto che rispetta U e IIA è la dittatura

Dimostrazione del teorema di Arrow

- ▶ Prima di procedere con la dimostrazione del teorema di Arrow, abbiamo bisogno di qualche definizione:
 - ▶ dati un insieme $[n]$ di alternative e un insieme $[k]$ di votanti, un **profilo** è una k -upla $\mathbf{P} = \langle r_1, r_2, \dots, r_k \rangle$ di ranking – ciascuno espressione del voto di uno dei votanti per quelle alternative
 - ▶ ESEMPIO: un profilo di 6 votanti (r_1, \dots, r_6) su 4 alternative (a, b, c, d)

r_1	a	b	c	d
r_2	b	a	c	d
r_3	a	c	d	b
r_4	d	c	b	a
r_5	b	c	a	d
r_6	a	d	c	b

Dimostrazione del teorema di Arrow

- Prima di procedere con la dimostrazione del teorema di Arrow, abbiamo bisogno di qualche definizione:
 - dati un insieme $[n]$ di alternative, un insieme $[k]$ di votanti, e un profilo $P = \langle r_1, r_2, \dots, r_k \rangle$, una **alternativa polarizzante per P** è un'alternativa $x \in [n]$ tale che, **per ogni $h \in [k]$, $\rho_h(x) = 0$ oppure $\rho_h(x) = n - 1$**
 - ESEMPIO:

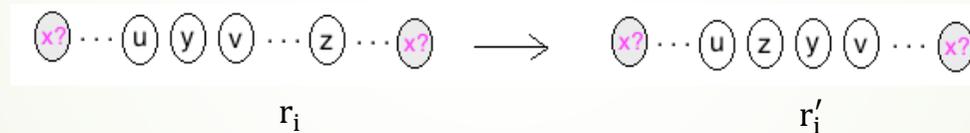
r_1	a	b	c	d
r_2	b	d	c	a
r_3	a	c	d	b
r_4	a	c	b	d
r_5	b	c	d	a
r_6	a	d	c	b

Dimostrazione del teorema di Arrow

- ▶ Dimostriamo il teorema di Arrow in tre passi
- ▶ 1) dimostriamo che **se x è un'alternativa polarizzante per un profilo $P = \langle r_1, r_2, \dots, r_k \rangle$ allora $\rho(x) = 0$ oppure $\rho(x) = n - 1$**
 - ▶ al solito, ρ è la funzione peso associata al voto collettivo r (che soddisfa σ) corrispondente a P
- ▶ 2) definiamo una successione di $k+1$ profili in ciascuno dei quali una stessa $x \in [n]$ è polarizzante e, tramite essi, individuiamo un dittatore potenziale
 - ▶ σ è un sistema di voto: allora è in grado di esprimere un voto collettivo per ogni profilo possibile per n alternative e k votanti
 - ▶ e, dunque, anche per i k profili nei quali x è polarizzante
- ▶ 3) dimostriamo che il dittatore potenziale è, effettivamente, il dittatore cercato

Dimostrazione del teorema di Arrow

- 1) dimostriamo che **se x è un'alternativa polarizzante per un profilo $P = \langle r_1, r_2, \dots, r_k \rangle$ allora $\rho(x) = 0$ oppure $\rho(x) = n - 1$**
 - supponiamo per assurdo che $0 < \rho(x) < n - 1$: allora esistono due alternative $y, z \in [n]$ tali che $\rho(z) < \rho(x) < \rho(y)$
 - creiamo un nuovo profilo $P' = \langle r'_1, r'_2, \dots, r'_k \rangle$ nel modo seguente:
 - ⊗ per ogni $i \in [k]$ tale che $\rho_i(y) < \rho_i(z)$, $r'_i = r_i$
 - ⊗ per ogni $i \in [k]$ tale che $\rho_i(y) > \rho_i(z)$, r'_i è ottenuto da r_i spostando z alla sinistra di y , in modo che $\rho'_i(z) = \rho'_i(y) + 1$



- poiché x non è stata in alcun modo coinvolta negli spostamenti, x è un'alternativa polarizzante anche per P'
- inoltre, per ogni $i \in [k]$, in r_i e r'_i non sono variati gli ordini relativi di x e y e di x e z
- infine, per ogni $i \in [k]$ $\rho'_i(y) < \rho'_i(z)$

Dimostrazione del teorema di Arrow

- ▶ 1) dimostriamo che se x è un'alternativa polarizzante per un profilo $P = \langle r_1, r_2, \dots, r_k \rangle$ allora $\rho(x) = 0$ oppure $\rho(x) = n - 1$
 - ▶ supponiamo per assurdo che $0 < \rho(x) < n - 1$: allora esistono due alternative $y, z \in [n]$ tali che $\rho(z) < \rho(x) < \rho(y)$
 - ▶ creiamo un nuovo profilo $P' = \langle r'_1, r'_2, \dots, r'_k \rangle$ tale che:
 - ▶ per ogni $i \in [k]$, in r_i e r'_i non sono variati gli ordini relativi di x e y e di x e z
 - ▶ e infine, per ogni $i \in [k]$ $\rho'_i(y) < \rho'_i(z)$
 - ▶ poiché per ogni $i \in [k]$, in r_i e r'_i non sono variati gli ordini relativi di x e z , allora, per il principio IIA, $\rho(x) < \rho(z) \leftrightarrow \rho'(x) < \rho'(z)$
 - ▶ ma abbiamo supposto $\rho(z) < \rho(x) < \rho(y)$: allora, $\rho'(z) < \rho'(x)$
 - ▶ poiché per ogni $i \in [k]$, in r_i e r'_i non sono variati gli ordini relativi di x e y , allora, per il principio IIA, $\rho(x) < \rho(y) \leftrightarrow \rho'(x) < \rho'(y)$
 - ▶ ma abbiamo supposto $\rho(z) < \rho(x) < \rho(y)$: allora, $\rho'(x) < \rho'(y)$
 - ▶ inoltre, per ogni $i \in [k]$ $\rho'_i(y) < \rho'_i(z)$: allora, per il principio U deve essere $\rho'(y) < \rho'(z)$
 - ▶ ossia, $\rho'(z) < \rho'(x) < \rho'(y) < \rho'(z)$ - un assurdo

Dimostrazione del teorema di Arrow

- 2) **definiamo una successione di $k+1$ profili in ciascuno dei quali una stessa $x \in [n]$ è polarizzante e, tramite essi, individuiamo un dittatore potenziale**

- scegliamo $x \in [n]$

- nel profilo $P^0 = \langle r_1^0, r_2^0, \dots, r_k^0 \rangle$ l'alternativa x è in ultima posizione in tutti i ranking: per ogni $i \in [k]$, $\rho_i^0(x) = 0$

- nel profilo $P^1 = \langle r_1^1, r_2^1, \dots, r_k^1 \rangle$ l'alternativa x è in prima posizione nel ranking r_1^1 , in ultima posizione in tutti gli altri ranking:

$$\rho_1^1(x) = n - 1$$

$$\text{per ogni } i \in [k] - \{1\}, \rho_i^1(x) = 0$$

- in generale, nel profilo $P^h = \langle r_1^h, r_2^h, \dots, r_k^h \rangle$ l'alternativa x è in prima posizione nei ranking r_i^h con $i \leq h$, in ultima posizione in tutti gli altri ranking:

$$\text{per ogni } i \leq h, \rho_i^h(x) = n - 1$$

$$\text{per ogni } i > h, \rho_i^h(x) = 0$$

- per ogni $h \in \{0, \dots, k\}$, indichiamo con r^h il ranking collettivo associato a P^h , e con ρ^h la funzione peso ad esso associata

Dimostrazione del teorema di Arrow

- 2) definiamo una successione di $k+1$ profili in ciascuno dei quali una stessa $x \in [n]$ è polarizzante e, tramite essi, individuiamo un dittatore potenziale

P^0

r_1^0	x
r_2^0	x
...	x
r_h^0	x
...	x
r_k^0	x

P^1

r_1^1	x
r_2^1	x
...	x
r_h^1	x
...	x
r_k^1	x

P^2

r_1^2	x
r_2^2	x
...	x
r_h^2	x
...	x
r_k^2	x

...

P^h

r_1^h	x
r_2^h	x
...	x
r_h^h	x
...	x
r_k^h	x

...

P^k

r_1^k	x
r_2^k	x
...	x
r_h^k	x
...	x
r_k^k	x

Dimostrazione del teorema di Arrow

- 2) definiamo una successione di $k+1$ profili in ciascuno dei quali una stessa $x \in [n]$ è polarizzante e, tramite essi, individuamo un dittatore potenziale
 - in generale, nel profilo $P^h = \langle r_1^h, r_2^h, \dots, r_k^h \rangle$ l'alternativa x è in prima posizione nei ranking r_i^h con $i \leq h$, in ultima posizione in tutti gli altri ranking:
 per ogni $i \leq h$, $\rho_i^h(x) = n - 1$ e per ogni $i > h$, $\rho_i^h(x) = 0$
 - i due profili P^{h-1} e P^h differiscono solo per il modo in cui l' h -esimo votante giudica x : nel profilo P^{h-1} l' h -esimo votante giudica x ultima ($\rho_h^{h-1}(x) = 0$), mentre nel profilo P^h l' h -esimo votante giudica x prima ($\rho_h^h(x) = n - 1$)
 - e le posizioni relative delle altre alternative rimangono invariate nei due profili

P^{h-1}

r_1^{h-1}	x
r_2^{h-1}	x
...	x
r_{h-1}^{h-1}	x
r_h^{h-1}	x
...	x
r_k^h	x

P^h

r_1^h	x
r_2^h	x
...	x
r_{h-1}^h	x
r_h^h	x
...	x
r_k^h	x

Dimostrazione del teorema di Arrow

- ▶ 2) definiamo una successione di $k+1$ profili in ciascuno dei quali una stessa $x \in [n]$ è polarizzante e, tramite essi, individuiamo un dittatore potenziale
 - ▶ in generale, nel profilo $P^h = \langle r_1^h, r_2^h, \dots, r_k^h \rangle$ l'alternativa x è in prima posizione nei ranking r_i^h con $i \leq h$, in ultima posizione in tutti gli altri ranking:
per ogni $i \leq h$, $\rho_i^h(x) = n - 1$ e per ogni $i > h$, $\rho_i^h(x) = 0$
 - ▶ i due profili P^{h-1} e P^h differiscono solo per il modo in cui l' h -esimo votante giudica x : nel profilo P^{h-1} l' h -esimo votante giudica x ultima ($\rho_h^{h-1}(x) = 0$), mentre nel profilo P^h l' h -esimo votante giudica x prima ($\rho_h^h(x) = n - 1$)
 - ▶ e le posizioni relative delle altre alternative rimangono invariate nei due profili
- ▶ in virtù del principio U (unanimità), $\rho^0(x) = 0$ e $\rho^k(x) = n - 1$
- ▶ allora, **esiste un profilo $j \in [k]$ tale che $\rho^h(x) = 0$ per ogni $h < j$, e $\rho^j(x) > 0$**
 - ▶ Osserviamo: $j > 0$ (strettamente) perché $\rho^0(x) = 0$
- ▶ e quindi, poiché x è polarizzante per P^j , e **$\rho^j(x) = n - 1$**
- ▶ Osserviamo che il votante j ha molto potere nel posizionare x nella graduatoria finale: la fa passare dall'ultima alla prima posizione
- ▶ **j è il dittatore potenziale**

Dimostrazione del teorema di Arrow

- ▶ 3) dimostriamo che j è, effettivamente, il dittatore cercato
 - ▶ sia $Q = \langle r_1^Q, r_2^Q, \dots, r_k^Q \rangle$ un profilo di k votanti per n alternative
 - ▶ per ogni $h \in [k]$, indichiamo con ρ_h^Q la funzione peso associata a r_h^Q
 - ▶ e indichiamo con r^Q il ranking collettivo (**che soddisfa σ**) corrispondente a Q e con ρ^Q la funzione peso associata a r^Q
- ▶ dobbiamo mostrare che **qualunque sia Q** , $r^Q = r_j^Q$
- ▶ ossia, che, qualunque sia Q , comunque si scelgano due alternative $y, z \in [n]$,
$$\rho^Q(y) > \rho^Q(z) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)$$
- ▶ realizziamo questo obiettivo in 2 passi:
 - ▶ 3.1) dimostriamo che se $y \neq x$ e $z \neq x$ allora $[\rho^Q(y) > \rho^Q(z) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)]$
 - ▶ 3.2) dimostriamo che se $y \neq x$ allora $[\rho^Q(y) > \rho^Q(x) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(x)]$

Dimostrazione del teorema di Arrow

► 3.1) dimostriamo che se $y \neq x$ e $z \neq x$ allora $[\rho^Q(y) > \rho^Q(z) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)]$

► senza perdita di generalità, supponiamo che sia $\rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)$

► costruiamo da Q un nuovo profilo T:

► innanzi tutto, per ogni $h \leq j$, poniamo x in testa di r_h^T lasciando tutte le altre alternative nello stesso ordine nel quale si trovano in r_h^Q

► poi, per ogni $h > j$, poniamo x in coda di r_h^T lasciando tutte le altre alternative nello stesso ordine nel quale si trovano in r_h^Q

► infine, spostiamo y dalla posizione in cui si trova in r_j^Q ponendola in testa a r_j^T

r_1^Q	...	x...	...
r_2^Q	x
...x	...
r_j^Q	...	y...z...x	
...	x
r_k^Qx.	...

Q

$r_1^{Q \rightarrow T}$	x
$r_2^{Q \rightarrow T}$	x
...	x
$r_j^{Q \rightarrow T}$	x	y...z	...
...	x
$r_k^{Q \rightarrow T}$	x

→

r_1^T	x
r_2^T	x
...	x
r_j^T	y	x	...z...	...
...	x
r_k^T	x

T

Dimostrazione del teorema di Arrow

► 3.1) dimostriamo che se $y \neq x$ e $z \neq x$ allora $[\rho^Q(y) > \rho^Q(z) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)]$

► senza perdita di generalità, supponiamo che sia $\rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)$

► abbiamo costruito da Q il nuovo profilo T nel quale x è in testa di r_h^T per $h < j$, y è in testa seguito da x in r_j^T e x è in coda di r_h^T con $h > j$

► T è molto simile a P^j :

T

r_1^T	x
r_2^T	x
...	x
r_j^T	y	x	...z...	...
...	x
r_k^T	x

P^j

r_1^j	x
r_2^j	x
...	x
r_j^j	x
...	x
r_k^j	x

► poiché $\rho^j(x) = n - 1$ (come avevamo visto al lucido 43) allora $\rho^j(x) > \rho^j(z)$

► poiché l'ordine relativo di x e z è lo stesso in P^j e in T, allora, per IIA, $\rho^T(x) > \rho^T(z)$

Dimostrazione del teorema di Arrow

► 3.1) dimostriamo che se $y \neq x$ e $y \neq x$ allora $[\rho^Q(y) > \rho^Q(z) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)]$

► senza perdita di generalità, supponiamo che sia $\rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)$

► abbiamo costruito da Q il nuovo profilo T nel quale x è in testa di r_h^T per $h < j$, y è in testa seguito da x in r_j^T e x è in coda di r_h^T con $h > j$

► T è molto simile anche a P^{j-1} :

T

r_1^T	x
r_2^T	x
...	x
r_j^T	y	x	...z...	...
...	x
r_k^T	x

P^{j-1}

r_1^{j-1}	x
r_2^{j-1}	x
...	x
r_{j-1}^{j-1}	x
r_j^{j-1}	x
...	x
r_k^{j-1}			x

► poiché $\rho^{j-1}(x) = 0$ (come avevamo visto al lucido 43) allora $\rho^{j-1}(x) < \rho^{j-1}(y)$

► poiché l'ordine relativo di x e y è lo stesso in P^{j-1} e in T, allora, per IIA, $\rho^T(x) < \rho^T(y)$

Dimostrazione del teorema di Arrow

- ▶ 3.1) dimostriamo che se $y \neq x$ e $y \neq x$ allora **$[\rho^Q(y) > \rho^Q(z) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)]$**
 - ▶ senza perdita di generalità, supponiamo che sia **$\rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)$**
 - ▶ abbiamo costruito da Q il nuovo profilo T nel quale x è in testa di r_h^T per $h < j$, y è in testa seguito da x in r_j^T e x è in coda di r_h^T con $h > j$
 - ▶ dalla stessa posizione relativa di x e z in P_i e in T, dal fatto che $\rho^i(x) > \rho^i(z)$, e in virtù del IIA, abbiamo concluso che $\rho^T(x) > \rho^T(z)$
 - ▶ dalla stessa posizione relativa di x e y in P_{i-1} e in T, dal fatto che $\rho^i(x) < \rho^i(y)$, e in virtù del IIA, abbiamo concluso che $\rho^T(x) < \rho^T(y)$
 - ▶ ossia, $\rho^T(y) > \rho^T(z)$
 - ▶ osserviamo che, per tutti i votanti, l'ordine relativo di z e y è lo stesso in Q e in T
 - ▶ e, quindi, per IIA, **$\rho^Q(y) > \rho^Q(z)$**
- ▶ e, naturalmente, essendo y e z interscambiabili (variabili mute), questo prova anche che **se $\rho_j^Q(y) < \rho_j^Q(z)$ allora $\rho^Q(y) < \rho^Q(z)$**

Dimostrazione del teorema di Arrow

- ▶ 3.2) dimostriamo che se $y \neq x$ allora $[\rho^Q(y) > \rho^Q(x) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(x)]$
- ▶ poiché $n > 2$, allora esiste $z \in [n]$ tale che $z \neq x$ e $z \neq y$
- ▶ deriviamo da P^0, P^1, \dots, P^k una nuova sequenza T^0, T^1, \dots, T^k di profili spostando l'alternativa z :
 - ▶ indichiamo $T^h = \langle t_1^h, t_2^h, \dots, t_k^h \rangle$ (vedi prossima slide)
 - ▶ T^0 è ottenuto spostando z in ultima posizione in ciascun ranking del profilo P^0
 - ▶ per $h > 0$, T^h è ottenuto dal profilo P^h : l'alternativa z viene spostata in prima posizione nei ranking t_i^h con $i \leq h$, in ultima posizione in tutti gli altri ranking, ossia
 - per ogni $i \leq h$, $\rho_i^{T^h}(z) = n - 1$
 - per ogni $i > h$, $\rho_i^{T^h}(z) = 0$
- ▶ per ogni $h \in \{0, \dots, k\}$, indichiamo con t^h il ranking collettivo associato a T^h , e con ρ^{T^h} la funzione peso ad esso associata

Dimostrazione del teorema di Arrow

La nuova sequenza T^0, T^1, \dots, T^k di profili

 T^0

r_1^0	XZ
r_2^0	XZ
...	XZ
r_h^0	XZ
...	XZ
r_k^0	XZ

 T^1

r_1^1	ZX
r_2^1	XZ
...	XZ
r_h^1	XZ
...	XZ
r_k^1	XZ

 T^2

r_1^2	ZX
r_2^2	ZX
...	XZ
r_h^2	XZ
...	XZ
r_k^2	XZ

...

 T^h

r_1^h	ZX
r_2^h	ZX
...	ZX
r_h^h	ZX
...	XZ
r_k^h	XZ

...

 T^k

r_1^k	ZX
r_2^k	ZX
...	ZX
r_h^k	ZX
...	ZX
r_k^k	ZX

Dimostrazione del teorema di Arrow

- ▶ 3.2) dimostriamo che se $y \neq x$ allora $[\rho^Q(y) > \rho^Q(x) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(x)]$
 - ▶ poiché $n > 3$, allora esiste $z \in [n]$ tale che $z \neq x$ e $z \neq y$
 - ▶ deriviamo da P^0, P^1, \dots, P^k una nuova sequenza T^0, T^1, \dots, T^k di profili, dove
 - per ogni $i \leq h$, $\rho_i^{T^h}(z) = n - 1$
 - per ogni $i > h$, $\rho_i^{T^h}(z) = 0$
 - ▶ per ogni $h \in \{0, \dots, k\}$, indichiamo con t^h il ranking collettivo associato a T^h , e con ρ^{T^h} la funzione peso ad esso associata
 - ▶ Esattamente come per i profili P^0, P^1, \dots, P^k , **esiste $\ell \in [k]$ tale che $\rho^{T^h}(z) = 0$ per ogni $h < \ell$, e $\rho^{T^\ell}(z) = n - 1$**
 - ▶ E, esattamente come abbiamo dimostrato per il dittatore potenziale j al punto 3.1), possiamo dimostrare che, **per ogni profilo Q , se $y \neq z$ e $v \neq z$ allora**
 - $[\rho^Q(y) > \rho^Q(v) \leftrightarrow \rho_\ell^Q(y) > \rho_\ell^Q(v)]$
 - ▶ quindi, in particolare, **per ogni profilo Q , se $y \neq z$ e poiché $x \neq z$ allora**
 - $[\rho^Q(y) > \rho^Q(x) \leftrightarrow \rho_\ell^Q(y) > \rho_\ell^Q(x)]$

Dimostrazione del teorema di Arrow

- ▶ 3.2) dimostriamo che se $y \neq x$ allora $[\rho^Q(y) > \rho^Q(x) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(x)]$
 - ▶ sappiamo che **per ogni profilo Q, se $y \neq z$ e $v \neq z$ allora**
$$[\rho^Q(y) > \rho^Q(v) \leftrightarrow \rho_\ell^Q(y) > \rho_\ell^Q(v)]$$
 - ▶ per concludere la dimostrazione del punto 3.2) è allora sufficiente mostrare che $\ell = j$
 - ▶ e lo faremo mostrando che
 - ▶ non può essere $\ell < j$
 - ▶ non può essere $\ell > j$

Dimostrazione del teorema di Arrow

3.2) dimostriamo che se $y \neq x$ allora $[\rho^Q(y) > \rho^Q(x) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(x)]$

sappiamo che **per ogni profilo Q, se $y \neq z$ e $v \neq z$ allora**

$$[\rho^Q(y) > \rho^Q(v) \leftrightarrow \rho_\ell^Q(y) > \rho_\ell^Q(v)]$$

non può essere $\ell < j$:

per dimostrarlo, mostriamo che esiste almeno un profilo P tale che $\rho^P \neq \rho_\ell^P$

ricordiamo che, poiché abbiamo scelto j tale che $\rho^h(x) = 0$ per ogni $h < j$ e $\rho^j(x) > 0$,

allora nel profilo P^{j-1} vale che $\rho^{j-1}(x) = 0$ e, quindi,

$$\rho^{j-1}(x) < \rho^{j-1}(y)$$

ma, poiché $\rho_i^h(x) = n - 1$ per ogni $i \leq h$, allora $\rho_\ell^{j-1}(x) = n - 1$

allora $\rho_\ell^{j-1}(x) > \rho_\ell^{j-1}(y)$ ossia, $\rho^{j-1} \neq \rho_\ell^{j-1}$

ossia, per il profilo $P = P^{j-1}$ vale $\rho^P \neq \rho_\ell^P$

r_1^{j-1}	x
r_2^{j-1}	x
...	x
r_ℓ^{j-1}	x
...	x
r_{j-1}^{j-1}	x
r_j^{j-1}	x
...	x
r_k^{j-1}	x

P^{j-1}

Dimostrazione del teorema di Arrow

3.2) dimostriamo che se $y \neq x$ allora $[\rho^Q(y) > \rho^Q(x) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(x)]$

sappiamo che **per ogni profilo Q, se $y \neq z$ e $v \neq z$ allora**

$$[\rho^Q(y) > \rho^Q(v) \leftrightarrow \rho_\ell^Q(y) > \rho_\ell^Q(v)]$$

non può essere $\ell > j$:

per dimostrarlo, mostriamo che esiste almeno un profilo P tale che $\rho^P \neq \rho_\ell^P$

nel profilo P^j vale che $\rho^j(x) = n - 1$ e, quindi,

$$\rho^j(x) > \rho^j(y)$$

ma, poiché $\rho_i^h(x) = 0$ per ogni $i > h$, allora $\rho_\ell^j(x) = 0$

allora $\rho_\ell^j(x) < \rho_\ell^j(y)$ ossia, $\rho^j \neq \rho_\ell^j$

ossia, per il profilo $P = P^j$ vale $\rho^P \neq \rho_\ell^P$

quindi, $\ell = j$. QED

r_1^j	x
r_2^j	x
...	x
r_j^j	x
...	x
r_ℓ^j	x
...	x
r_k^j	x

P^j

Ombre e luci del teorema di Arrow

- ▶ Certo che il teorema di Arrow getta un'ombra scura sui sistemi di voto
- ▶ perché afferma che un sistema di voto,
 - ▶ per non essere soggetto a manipolazioni interessate (utilizzando alternative irrilevanti)
 - ▶ ed essere in grado di rispecchiare la volontà dell'unanimità
- ▶ deve essere una dittatura.
- ▶ Che non è una prospettiva proprio rassicurante.
- ▶ Tuttavia, se le alternative hanno certe caratteristiche
 - ▶ e se i ranking dei votanti soddisfano una certa proprietà
 - ▶ (perfettamente plausibile in presenza di quelle caratteristiche delle alternative)
- ▶ allora il teorema di Arrow può essere "aggirato"

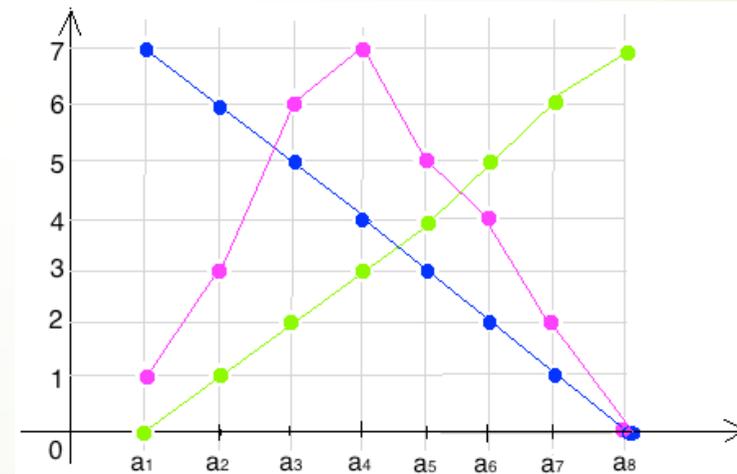
Single peaked preferences

- Supponiamo che **le alternative siano un insieme totalmente ordinato**, ossia:
 $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$ con **$a_i < a_{i+1}$, per ogni $i = 1, \dots, n-1$**
 - dove con " $<$ " indichiamo una qualche relazione d'ordine
- Il ranking del votante h , $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, \dots, a_{hn} \rangle$, è **single peaked** se, **comunque si scelgano tre alternative $a_i < a_j < a_\ell$, non accade che $\rho_h(a_j) < \rho_h(a_i)$ e $\rho_h(a_j) < \rho_h(a_\ell)$**

$$\forall a_i, a_j, a_\ell \in A : a_i < a_j < a_\ell [\neg(\rho_h(a_j) < \rho_h(a_i) \wedge \rho_h(a_j) < \rho_h(a_\ell))]$$

- ossia, considerando ρ_h come una funzione definita su un dominio continuo, ρ_h non ha minimi relativi

In figura, tre ranking single peaked (rosa, blu e verde)



Single peaked preferences

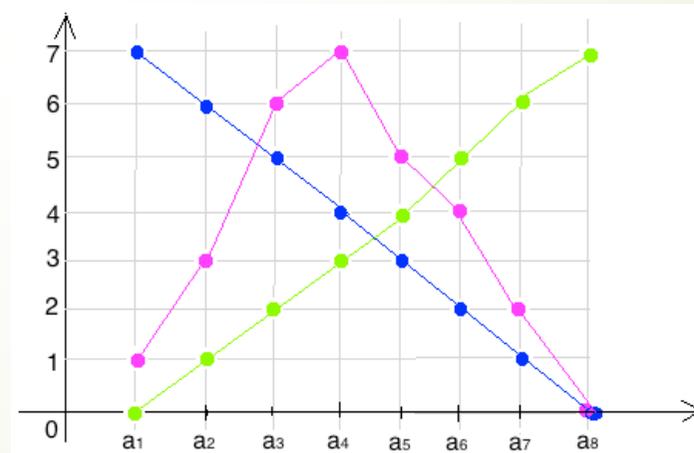
- ▶ Supponiamo che le alternative siano un insieme totalmente ordinato, ossia:
$$A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \} \quad \text{con} \quad a_i < a_{i+1}, \text{ per ogni } i = 1, \dots, n-1$$
- ▶ un ranking single peaked è, in effetti, un'ipotesi del tutto ragionevole in questa situazione
- ▶ ESEMPIO 1:
 - ▶ possiamo ordinare gli schieramenti politici lungo un asse a partire da quelli di estrema sinistra a quelli di estrema destra
 - ▶ e difficilmente un elettore il cui schieramento politico preferito è di estrema sinistra avrà come seconda preferenza uno schieramento di estrema destra e come terza preferenza uno schieramento di centro...
- ▶ ESEMPIO 2:
 - ▶ tipicamente, il livello di un college statunitense è tanto migliore quanto più elevata è la sua retta
 - ▶ un genitore che deve iscrivere il figlio, tipicamente, avrà un range di preferenze concentrate intorno alla retta che può permettersi di pagare...
 - ▶ difficilmente avrà come prima preferenza il college più esclusivo, come seconda preferenza quello più popolare e come terza preferenza, di nuovo un college molto costoso

Single peaked preferences

- ▶ Supponiamo che le alternative siano un insieme totalmente ordinato, ossia:
 $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$ con $a_i < a_{i+1}$, per ogni $i = 1, \dots, n-1$
- ▶ e che ogni votante esprima un ranking single peaked
- ▶ In questo caso, possiamo supporre **senza perdita di generalità*** che, per ogni $h \in [k]$, il picco del votante h non preceda il picco del votante $h+1$
 - ▶ ossia: sia $P = \langle r_1, r_2, \dots, r_k \rangle$ un profilo nel quale ogni ranking è single peaked
 - ▶ per ogni $h \in [k]$, indichiamo con M_h l'alternativa preferita dal votante h , cioè, $M_h \in A$ e $\rho_h(M_h) = n - 1$
 - ▶ allora, $M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_k$

In figura, il votante 1 è quello blu
il votante 2 è quello rosa,
il votante 3 è quello verde

*ossia a meno di un riordinamento
dei votanti



Il teorema del votante mediano

- *Nel caso in cui le alternative sono un insieme totalmente ordinato e i ranking di tutti i votanti sono single peaked è possibile utilizzare il sistema di voto a maggioranza con la certezza di non incorrere nel paradosso di Condorcet*
- Questo è garantito dal seguente

Teorema del votante mediano. Sia $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un insieme di alternative tali che $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, e sia $P = \langle r_1, r_2, \dots, r_{2k-1} \rangle$ è un profilo per A nel quale ogni ranking è single peaked e tale che $M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_{2k-1}$, allora, per ogni $y \in A - \{M_k\}$

$$|\{h : \rho_h(M_k) > \rho_h(y)\}| > |\{h : \rho_h(y) > \rho_h(M_k)\}|$$

- *Il teorema del votante mediano ci dice che, nelle ipotesi della sua validità, esiste una alternativa che batte qualunque altra alternativa, nei confronti a coppie, per il maggior numero dei votanti*

Il teorema del votante mediano

- ▶ Il teorema del votante mediano ci dice che, nelle ipotesi della sua validità, esiste una alternativa che batte qualunque altra alternativa, nei confronti a coppie, per il maggior numero dei votanti
 - ▶ ed essa è **l'alternativa che corrisponde al picco del votante che si trova in posizione centrale nell'insieme dei picchi ordinati**
 - ▶ **nel sistema di voto a maggioranza, essa è l'alternativa prima classificata**
- ▶ Poi, osserviamo che: rimuovendo l'alternativa prima classificata dall'insieme di alternative, i $2k - 1$ ranking sulle alternative rimanenti sono ancora single peaked
 - ▶ allora, possiamo ordinarli per picchi non decrescenti
 - ▶ e dedurre, dal teorema del votante mediano, che il picco che occupa la posizione centrale nell'ordinamento non decrescente dei picchi sulle $n - 1$ alternative corrisponde all'alternativa seconda classificata
- ▶ e così via, e così via...
- ▶ Ma vediamo un esempio

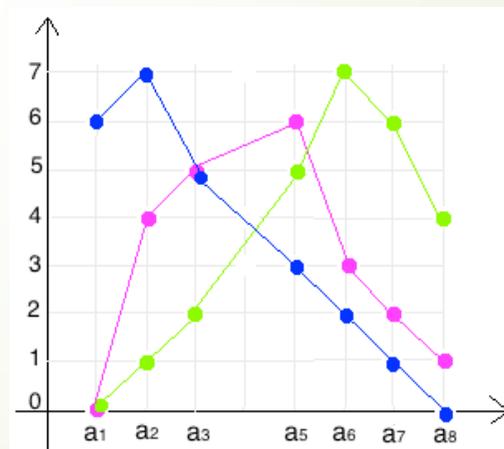
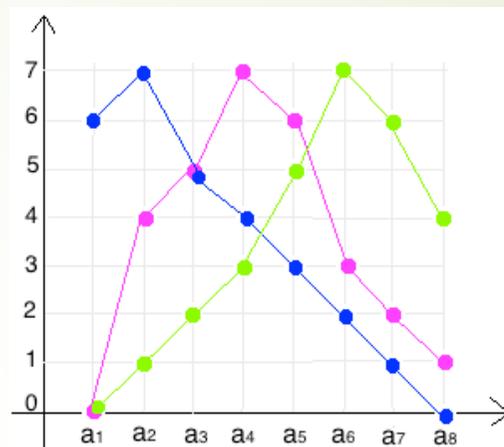
Il teorema del votante mediano

- ESEMPIO: $n = 8, k = 2$
 - 1) In questo caso,
 $M_1 = \mathbf{M} = a_2, M_2 = \mathbf{M} = a_4, M_3 = \mathbf{M} = a_6,$
 - quindi, detta ρ la funzione peso associata al ranking collettivo, $\rho(a_4) = 7$

- 2) ora
 $M_1 = \mathbf{M} = a_2, M_2 = \mathbf{M} = a_5, M_3 = \mathbf{M} = a_6,$

- quindi, $\rho(a_5) = 6$

- ... to be continued



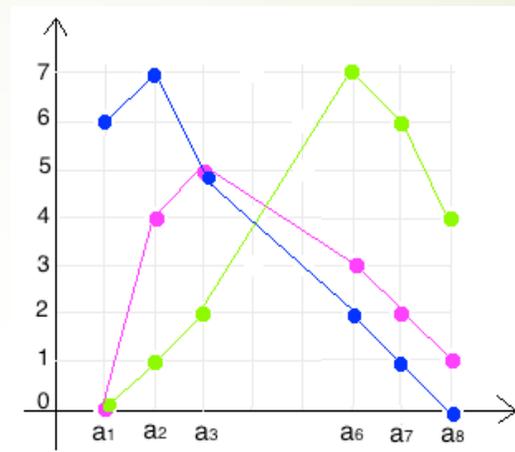
Il teorema del votante mediano

➤ ESEMPIO: $n = 8, k = 2$

➤ 3) ora

$$M_1 = \mathbf{M} = a_2, M_2 = \mathbf{M} = a_3, M_3 = \mathbf{M} = a_6,$$

➤ quindi, $\rho(a_3) = 5$

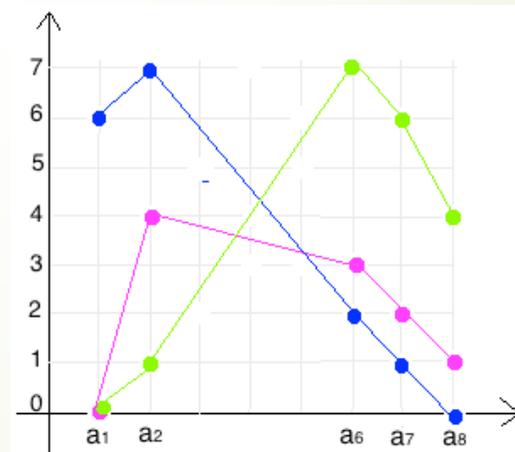


➤ 4) ora

$$M_1 = \mathbf{M} = a_2, M_2 = \mathbf{M} = a_2, M_3 = \mathbf{M} = a_6,$$

oppure, equivalentemente,
 $M_1 = \mathbf{M} = a_2, M_2 = \mathbf{M} = a_2, M_3 = \mathbf{M} = a_6,$

➤ quindi, $\rho(a_2) = 4$



➤ ... to be continued

Il teorema del votante mediano

➤ ESEMPIO: $n = 8, k = 2$

➤ 5) ora

$M_1 = \mathbf{M} = a_1, M_2 = \mathbf{M} = a_6, M_3 = \mathbf{M} = a_6,$
oppure, equivalentemente,
 $M_1 = \mathbf{M} = a_2, M_2 = \mathbf{M} = a_6, M_3 = \mathbf{M} = a_6,$

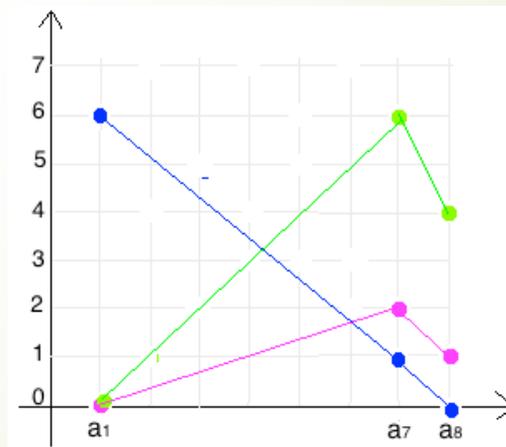
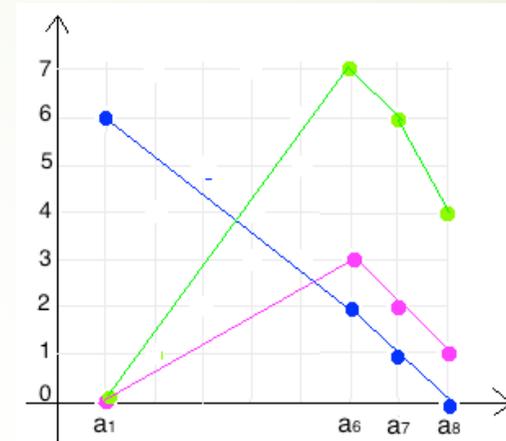
➤ quindi, $\rho(a_6) = 3$

➤ 6) ora

$M_1 = \mathbf{M} = a_2, M_2 = \mathbf{M} = a_7, M_3 = \mathbf{M} = a_7,$
oppure, equivalentemente,
 $M_1 = \mathbf{M} = a_2, M_2 = \mathbf{M} = a_7, M_3 = \mathbf{M} = a_7,$

➤ quindi, $\rho(a_7) = 2$

➤ ... to be continued



Il teorema del votante mediano

► ESEMPIO: $n = 8, k = 2$

► 7) ora

$M_1 = \mathbf{M} = a_2, M_2 = \mathbf{M} = a_8, M_3 = \mathbf{M} = a_8,$
oppure, equivalentemente,
 $M_1 = \mathbf{M} = a_2, M_2 = \mathbf{M} = a_8, M_3 = \mathbf{M} = a_8,$

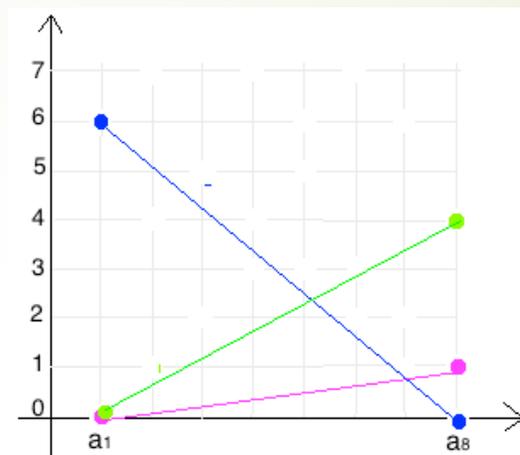
► quindi, $\rho(a_8) = 1$

► 8) infine, $\rho(a_1) = 0$

► in conclusione, il ranking collettivo corrispondente ai voti individuali **blu**, **rosa** e **verde** derivato in accordo al sistema di voto a maggioranza è

$$r = \langle a_4, a_5, a_3, a_2, a_6, a_7, a_8, a_1 \rangle$$

► non resta che dimostrare il teorema del votante mediano



Il teorema del votante mediano

- Teorema del votante mediano.** Sia $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un insieme di alternative tali che $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, e sia $P = \langle r_1, r_2, \dots, r_{2k-1} \rangle$ un profilo per A nel quale ogni ranking è single peaked e tale che $M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_{2k-1}$, allora, per ogni $y \in A - \{M_k\}$

$$|\{h : \rho_h(M_k) > \rho_h(y)\}| > |\{h : \rho_h(y) > \rho_h(M_k)\}|$$

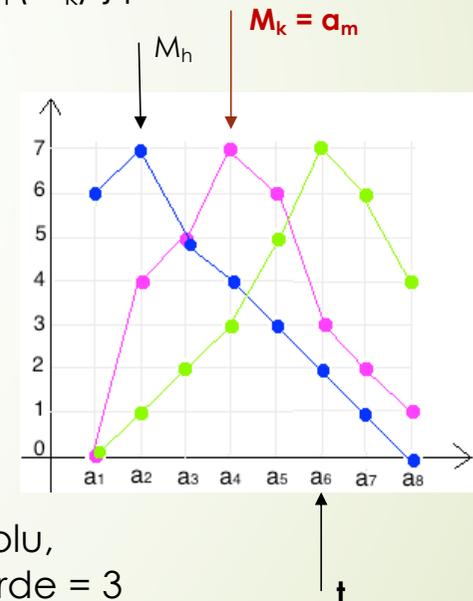
- Dimostrazione.** Sia $M_k = a_m$, ossia $\rho_k(a_m) = n - 1$. Allora

- 1) consideriamo un'alternativa $y = a_t$ con $t > m$

- per ogni $h < k$, poiché $M_h \leq M_k = a_m < a_t$, e poiché r_h è single peaked allora

$$\rho_h(a_m) > \rho_h(a_t)$$

- nell'esempio in figura, $k = \text{rosa}$, $m = 4$, $t = 6$ e $h = \text{blu}$, dove abbiamo assunto blu = 1, rosa = 2 e verde = 3



Il teorema del votante mediano

- **Teorema del votante mediano.** Sia $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un insieme di alternative tali che $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, e sia $P = \langle r_1, r_2, \dots, r_{2k-1} \rangle$ un profilo per A nel quale ogni ranking è single peaked e tale che $M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_{2k-1}$, allora, per ogni $y \in A - \{M_k\}$

$$|\{h : \rho_h(M_k) > \rho_h(y)\}| > |\{h : \rho_h(y) > \rho_h(M_k)\}|$$

- Dimostrazione. Sia $M_k = a_m$, ossia $\rho_k(a_m) = n - 1$. Allora

- 1) consideriamo un'alternativa $y = a_t$ con $t > m$

- per ogni $h < k$, poichè $M_h \leq M_k = a_m < a_t$, e poichè r_h è single peaked allora $\rho_h(a_m) > \rho_h(a_t)$

- ossia, tutti i votanti di indice $h < k$ preferiscono a_m ad a_t

- allora, i votanti che preferiscono a_t ad a_m possono essere solo quelli di indice $h > k$:

$$\{h \in [2k-1] : \rho_h(a_t) > \rho_h(a_m)\} \subseteq \{h \in [2k-1] : h > k\}$$

- e quindi $|\{h \in [2k-1] : \rho_h(a_t) > \rho_h(a_m)\}| \leq (2k-1) - k = k-1$

- cioè, per ogni $y > M_k$:

$$|\{h \in [2k-1] : \rho_h(M_k) > \rho_h(y)\}| > |\{h \in [2k-1] : \rho_h(y) > \rho_h(M_k)\}|$$

Il teorema del votante mediano

- Teorema del votante mediano.** Sia $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un insieme di alternative tali che $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, e sia $P = \langle r_1, r_2, \dots, r_{2k-1} \rangle$ un profilo per A nel quale ogni ranking è single peaked e tale che $M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_{2k-1}$, allora, per ogni $y \in A - \{M_k\}$

$$|\{h : \rho_h(M_k) > \rho_h(y)\}| > |\{h : \rho_h(y) > \rho_h(M_k)\}|$$

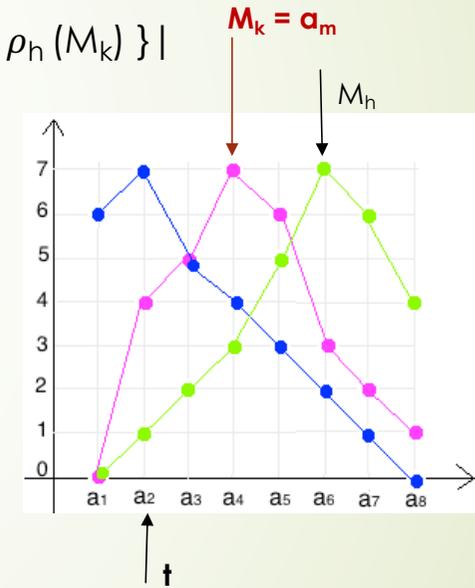
- Dimostrazione.** Sia $M_k = a_m$, ossia $\rho_h(a_m) = n - 1$. Allora

- 2) consideriamo un'alternativa $y = a_t$ con $t < m$

- per ogni $h > k$, poichè $a_t < a_m = M_k \leq M_h$, e poichè r_h è single peaked allora

$$\rho_h(a_m) > \rho_h(a_t)$$

- nell'esempio in figura, $k = \text{rosa}$, $m = 4$, $t = 2$
 e $h = \text{verde}$, dove abbiamo assunto blu = 1, rosa = 2 e verde = 3



Il teorema del votante mediano

- **Teorema del votante mediano.** Sia $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un insieme di alternative tali che $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, e sia $P = \langle r_1, r_2, \dots, r_{2k-1} \rangle$ un profilo per A nel quale ogni ranking è single peaked e tale che $M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_{2k-1}$, allora, per ogni $y \in A - \{M_k\}$

$$|\{h : \rho_h(M_k) > \rho_h(y)\}| > |\{h : \rho_h(y) > \rho_h(M_k)\}|$$

- Dimostrazione. Sia $M_k = a_m$, ossia $\rho_h(a_m) = n - 1$. Allora
 - 2) consideriamo un'alternativa $y = a_t$ con $t < m$
 - per ogni $h > k$, poichè $a_t < a_m = M_k \leq M_h$, e poichè r_h è single peaked allora $\rho_h(a_m) > \rho_h(a_t)$
 - ossia, i votanti di indice $h > k$ preferiscono a_m ad a_t
 - allora, i votanti che preferiscono a_t ad a_m possono essere solo quelli di indice $h < k$:
$$\{h \in [2k-1] : \rho_h(a_t) > \rho_h(a_m)\} \subseteq \{h \in [2k-1] : h < k\}$$
 - e quindi $|\{h \in [2k-1] : \rho_h(a_t) > \rho_h(a_m)\}| \leq (2k-1) - k = k-1$
 - cioè, per ogni $y > M_k$:
$$|\{h \in [2k-1] : \rho_h(M_k) > \rho_h(y)\}| > |\{h \in [2k-1] : \rho_h(y) > \rho_h(M_k)\}|$$

Il teorema del votante mediano

- **Teorema del votante mediano.** Sia $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un insieme di alternative tali che $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, e sia $P = \langle r_1, r_2, \dots, r_{2k-1} \rangle$ un profilo per A nel quale ogni ranking è single peaked e tale che $M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_{2k-1}$, allora, per ogni $y \in A - \{M_k\}$

$$|\{h : \rho_h(M_k) > \rho_h(y)\}| > |\{h : \rho_h(y) > \rho_h(M_k)\}|$$

- Dimostrazione. Sia $M_k = a_m$, ossia $\rho_h(a_m) = n - 1$. Allora

- 1) per ogni alternativa $y = a_t$ con $t > m$:

- $|\{h \in [2k-1] : r_h(M_k) > r_h(y)\}| > |\{h \in [2k-1] : r_h(y) > r_h(M_k)\}|$

- 2) per ogni alternativa $y = a_t$ con $t < m$

- $|\{h \in [2k-1] : r_h(M_k) > r_h(y)\}| > |\{h \in [2k-1] : r_h(y) > r_h(M_k)\}|$

- ossia, per ogni alternativa $y \in A - \{M_k\}$

- $|\{h \in [2k-1] : r_h(M_k) > r_h(y)\}| > |\{h \in [2k-1] : r_h(y) > r_h(M_k)\}|$

QED