



Introduzione alla calcolabilità

... e al corso

Lezione del 05/03/2025



Contenuti del corso

- Il modulo 2 del corso di Fondamenti di Informatica è suddiviso in due parti:
- nella prima parte ci occuperemo di Calcolabilità
 - ossia, di capire quali problemi possono essere risolti automaticamente
 - e, strada facendo, ci accorgeremo che esistono problemi che proprio non possono essere risolti
 - e, per farlo, dovremo capire cosa significa **risolvere automaticamente un problema**
 - e, a dirla tutta, cosa significa, in assoluto, **risolvere un problema**
 - e, persino, **cos'è un problema**
- nella seconda parte ci occuperemo di Complessità
 - ossia, di capire quali dei problemi che possono essere risolti, possono proprio essere risolti **per davvero**
 - ohibò! Pare una contraddizione!
 - ma, di questo ci occuperemo più avanti...



Prima di cominciare...

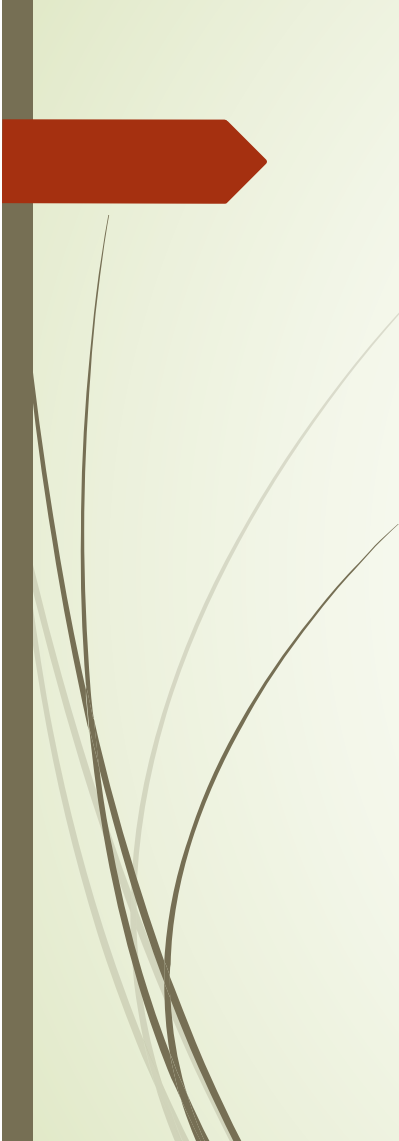
- ... un po' di notazioni: sia Σ un insieme finito (il nostro *alfabeto*: insieme di caratteri)
 - Σ^* è l'insieme di tutte le sequenze di 0 o più caratteri di Σ , che chiameremo parole
 - ad esempio, se $\Sigma = \{a,b\}$ aa, aba, baaaba sono parole in Σ^*
 - la parola di 0 caratteri in Σ^* è la parola vuota e sarà denotata con ε
 - date due parole x e y in Σ^* , indichiamo con xy la concatenazione di x e y , ossia, se $x = x_1x_2\dots x_n$ e $y = y_1y_2\dots y_k$, allora xy è la parola $x_1x_2\dots x_ny_1y_2\dots y_k$
 - data $x = x_1x_2\dots x_n \in \Sigma^*$, la parola inversa di x è $x^{-1} = x_nx_{n-1}\dots x_1$
 - data $x = x_1x_2\dots x_n \in \{0,1\}^*$, la parola complemento di x è $x^c = y_1y_2\dots y_n$ tale che, per $i=1, \dots, n$, $y_i = 0$ se $x_i = 1$ e $y_i = 1$ se $x_i = 0$



Problemi e istanze

- ▶ Cos'è un problema? Facile!
 - ▶ “Quanto fa $5 + 2$?” oppure “Quanto misura l'area di un rettangolo la cui base è lunga 28 e la cui altezza è lunga 12?”: ecco due esempi di problema!
- ▶ Sbagliato! Nell'esempio, sono illustrate due *istanze* di due problemi diversi
- ▶ I problemi cui corrispondono quelle istanze sono:
 - ▶ PROBLEMA SOMMA: dati due numeri naturali, n e k , calcolare il valore della somma di n con k (ossia, $n + k$)
 - ▶ PROBLEMA AREA: dato un rettangolo, la cui base è lunga b e la cui altezza è lunga h , calcolare l'area A di quel rettangolo
 - ▶ Chiara la distinzione?
- ▶ Un problema è la *descrizione* di un insieme di parametri, che chiameremo *dati*, collegati da un certo insieme di relazioni, associata alla richiesta di derivare da essi un altro insieme di parametri, che costituiscono la soluzione
- ▶ Un'istanza di un problema è un particolare insieme di valori associati ai dati

Su queste questioni torneremo, abbondantemente, (parecchio) più avanti



Trovare la soluzione di un'istanza

- ▶ Per trovare la soluzione di talune istanze di taluni problemi posso sfruttare le caratteristiche di quelle istanze
 - ▶ se chiedi a un bambino quanto fa $2 + 5$, quello può contare sulle dita
 - ▶ se hai bisogno di trovare $\sin \frac{\pi}{2}$, puoi disegnare la circonferenza goniometrica e vederlo
- ▶ D'altra parte, a volte non è così semplice
 - ▶ le dita non bastano per calcolare $49856739902 + 50672143559986$
 - ▶ e calcolare $\sin \frac{\sqrt[3]{\pi^{\pi+8} \ln \pi}}{5}$... non è proprio una passeggiata
- ▶ Altre volte, è proprio impossibile
 - ▶ per quanto tu sia bravo in matematica, un numero reale che corrisponda a $\sqrt{-4}$, non c'è verso, non riuscirai mai a trovarlo
 - ▶ quando l'istanza di un problema non ha soluzione diciamo che essa è una **istanza negativa**
 - ▶ e cominciate a tenerla a mente questa cosa delle **istanze negative**, ché vi tornerà utile (ecco!)



Risolvere un problema

- Risolvere un problema significa individuare un metodo che sappia trovare la soluzione di **qualunque** istanza positiva del problema
 - e, in più, che sappia riconoscere se un'istanza è negativa
- ossia, significa trovare un procedimento che, data una qualunque istanza del problema, indichi la sequenza di azioni che devono essere eseguite per trovare la soluzione di quell'istanza
 - o per poter concludere che, quell'istanza, una soluzione non ce l'ha
- E qui sorgono un (bel) po' di questioni:
 - innanzi tutto, cos'è un *procedimento*?
 - E, poi, che cos'è una *azione*?
 - E, infine, *chi* è supposto debba eseguire le azioni indicate?
- Come stiamo per vedere, queste questioni sono fra loro interconnesse

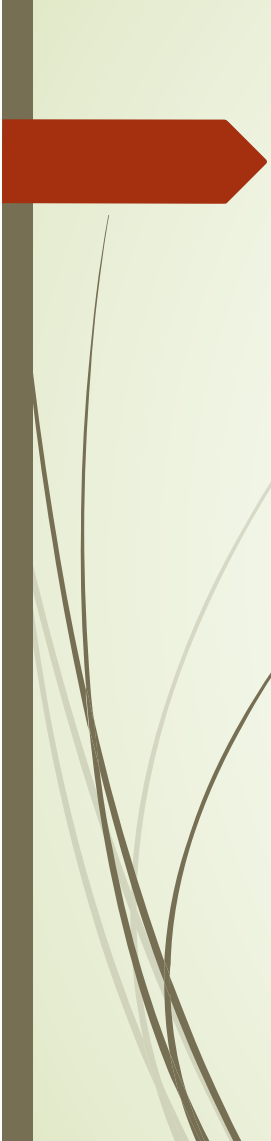


Risolvere un problema

- Cos'è un procedimento?
 - **Un procedimento è la descrizione di un insieme di azioni unita alla specifica dell'ordine con il quale le azioni devono essere eseguite**
- E che cos'è una azione?
 - Qualcosa che deve esser fatto, ovvio! Tuttavia...
 - Anche "data un'istanza del problema, trova la soluzione di quell'istanza" è una azione
 - Allora, dobbiamo dire che **le azioni indicate in un procedimento, devono essere azioni semplici, azioni, cioè, che possono essere eseguite con facilità**
- ESEMPIO: data una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ e dati due numeri reali a e b , calcolare la misura dell'area della regione di piano compresa fra la funzione, l'asse x e le rette $y=a$ e $y=b$
- PROCEDIMENTO: 1) calcola la funzione primitiva $F(x)$ di $f(x)$
2) calcola $F(b) - F(a)$

Risolvere un problema

- Un procedimento è la descrizione di un insieme di *azioni* unita alla specifica dell'ordine con il quale le azioni devono essere eseguite
 - e, a ciascuna di quelle azioni, viene dato il nome di **istruzione**
- e le istruzioni indicate in un procedimento, devono essere *elementari*, devono, cioè, essere azioni che possono essere eseguite con facilità
- ESEMPIO: data una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ e dati due numeri reali a e b , calcolare la misura dell'area della regione di piano compresa fra la funzione, l'asse x e le rette $y=a$ e $y=b$
- PROCEDIMENTO: 1) calcola la funzione primitiva $F(x)$ di $f(x)$
2) calcola $F(b) - F(a)$
- Certo, quello indicato è un procedimento che risolve il problema nell'esempio
- Tuttavia, "calcola la funzione primitiva $F(x)$ di $f(x)$ " è davvero un'*istruzione elementare*?
 - per me (che sono una matematica) sì, per un bambino in prima elementare no...
- Cioè, che sia elementare o no, *dipende da chi è supposto debba eseguire le azioni indicate*



L'istruzione elementare

- Dunque, se vogliamo **svincolare la definizione di procedimento risolutivo di un problema da quello di esecutore delle azioni in esso indicate**, è necessario, prima di tutto, chiarire formalmente cosa si intende con *istruzione elementare*
- Vediamo, a tal proposito, la soluzione individuata da Alan Turing a questa questione
- Turing, osservò che, indipendentemente dall'esecutore, qualunque istruzione, per potere essere definita *elementare*, deve avere le seguenti caratteristiche:
 - deve essere scelta in un insieme di "poche" istruzioni disponibili
 - deve scegliere l'azione da eseguire all'interno di un insieme di "poche" azioni possibili
 - deve poter essere eseguita ricordando una quantità limitata di dati, ossia, in termini più tecnici, utilizzando una quantità limitata di memoria.
- Osserviamo che le caratteristiche individuate da Turing indicano come istruzione elementare una operazione che possa essere eseguita... a mente!
- Chiariamo con un esempio



L'istruzione elementare

- Consideriamo il PROBLEMA SOMMA: dati due interi n e k , ci viene richiesto di calcolare il numero $n + k$
- Vogliamo progettare un procedimento che risolva questo problema
- Ebbene: calcolare la somma di due interi è certamente facile
 - abbiamo imparato a calcolarla in prima elementare!
- allora, potremmo pensare che l'istruzione "calcola $n + k$ " sia un'istruzione elementare
- ATTENZIONE: stiamo cercando un procedimento che risolva un problema (il PROBLEMA SOMMA), quindi "calcola $n + k$ " deve essere un'istruzione elementare **qualunque** valore venga assegnato a n e k
- Però, se $n = 37895$ e $k = 441238$...
- a nessuno di noi, soltanto guardando i due addendi, salta in mente il risultato
 - anche se le addizioni le sappiamo fare benissimo!

L'istruzione elementare

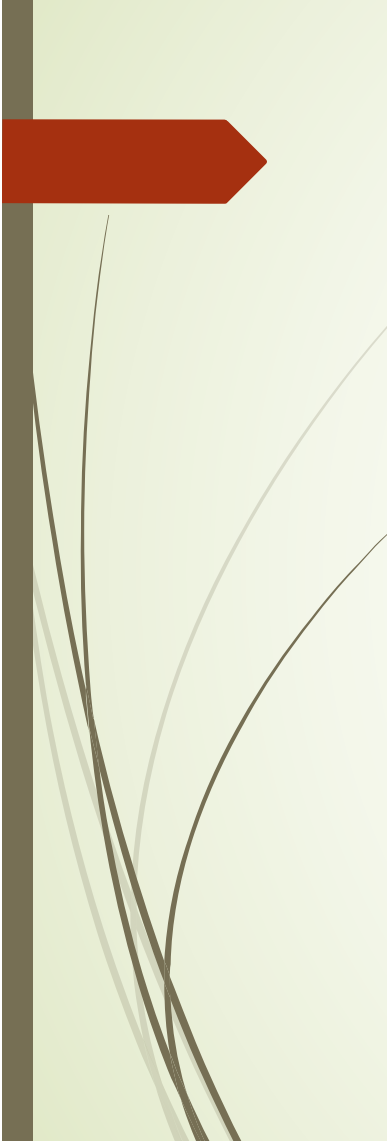
- Se $n = 37895$ e $k = 441238$, a nessuno di noi, guardando i due addendi, salta in mente quanto fa $n + k$
- Questo perché la nostra memoria è limitata
- Chiariamo:
 - In qualche modo, quando abbiamo imparato a fare le addizioni, abbiamo **memorizzato** la tabella che ci permette di calcolare a mente la somma di qualunque coppia di numeri di una cifra ciascuno

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

L'istruzione elementare

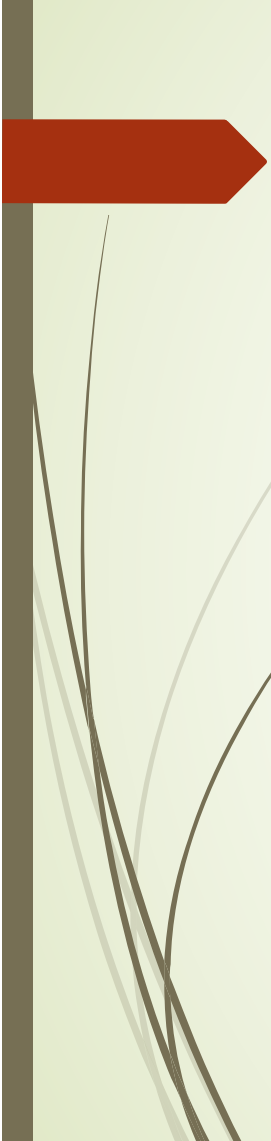
- Se $n = 37895$ e $k = 441238$, a nessuno di noi, guardando i due addendi, salta in mente quanto fa $n + k$
- Ma se disponessimo di una tabella *sufficientemente grande* che indica le somme di tutti i numeri naturali compresi fra 0 e 1000000 (ad esempio), ci basterebbe guardare nella cella opportuna e avremmo la somma cercata: al volo, ad occhio...

+	0	1	2	...	37895		1000000
0	0	1	2	...	37895	...	1000000
1	1	2	3	...	37896	...	1000001
2	2	3	4	...	37897	...	1000002
...	...	...	...	...		...	
441238	441238	441239	441240	...	479133	...	1441238
...	...	...	...	...		...	
1000000	1000000	1000001	1000002	...	1037895	...	2000000



L'istruzione elementare

- Se $n = 37895$ e $k = 441238$, a nessuno di noi, guardando i due addendi, salta in mente quanto fa $n + k$
- Ma se disponessimo di una tabella che indica le somme di tutti i numeri naturali compresi fra 0 e 1000000 (ad esempio), ci basterebbe guardare nella cella opportuna e avremmo la somma cercata: al volo, ad occhio...
- Ossia, disporre di questa nuova tabella ci permetterebbe di considerare istruzione elementare la somma di qualunque coppia di numeri naturali compresi fra 0 e 1000000
- Allora, è fatta! Basta predisporre una tabella *sufficientemente grande* e qualunque somma diventa un'istruzione elementare!
- Ma **NO, NON FUNZIONA IN QUESTO MODO!!!!**
- Il problema è che, per risolvere il PROBLEMA SOMMA, occorre indicare un procedimento che sappia addizionare *qualunque* coppia di numeri naturali
 - *per quanto grandi essi siano*
- e, quindi, se volessimo considerare istruzione elementare la somma di qualunque coppia di numeri, **dovremmo costruire una tabella infinita!**



L'istruzione elementare

- Ecco perché la somma di qualunque coppia di numeri naturali non può essere considerata un'operazione elementare: perché avremmo bisogno di memorizzare una tabella di dimensioni illimitate
- mentre, invece, la nostra memoria è limitata!
- Per questa ragione, per eseguire la somma di qualunque coppia di numeri naturali, utilizziamo un *procedimento* che
 - utilizza un numero limitato di operazioni elementari (le somme di coppie di numeri di una sola cifra)
 - e in cui ogni operazione elementare utilizza una quantità limitata di dati (due cifre e l'eventuale riporto)
- In accordo alle caratteristiche enunciate da Turing
- E adesso andiamo a ripassare questo procedimento ...

La somma di due numeri naturali

- Per calcolare il valore della somma $37895 + 441238$, innanzi tutto scriviamo l'operazione in colonna:

$$\begin{array}{r} 3 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 5 \quad + \\ 4 \quad 4 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 8 \quad = \\ \hline \end{array}$$

- poi, osserviamo le due cifre più a destra, e calcoliamo la loro somma e l'eventuale riporto

$$\begin{array}{r} 3 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \color{red}{5} \quad + \\ 4 \quad 4 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \color{red}{8} \quad = \\ \hline \end{array}$$

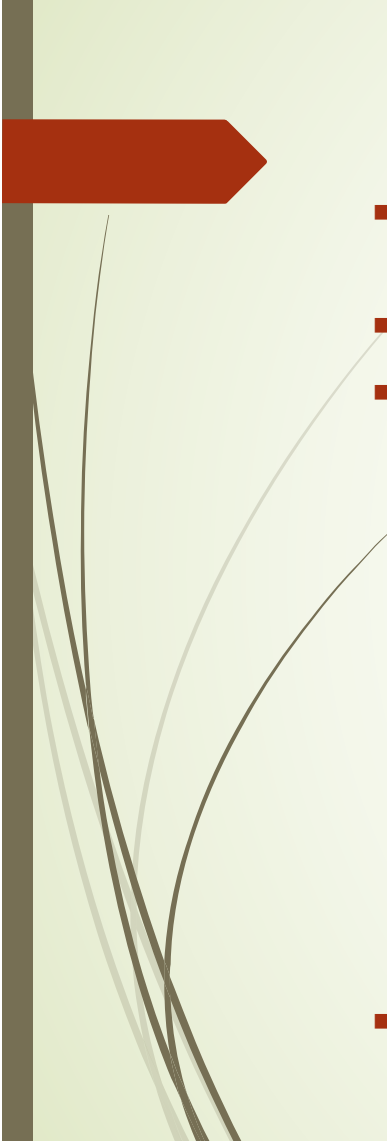
3 con riporto di 1

- poi, osserviamo le due cifre più a destra non ancora considerate, e calcoliamo la loro somma più l'eventuale riporto, e il nuovo eventuale riporto

$$\begin{array}{r} 3 \quad 7 \quad 8 \quad \color{red}{9} \quad 5 \quad + \\ 4 \quad 4 \quad 1 \quad 2 \quad \color{red}{3} \quad 8 \quad = \\ \hline \end{array}$$

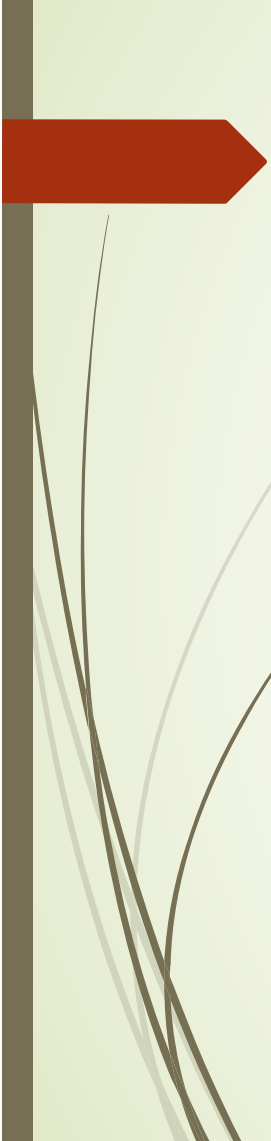
3 3 con riporto di 1

- ... e così via ...



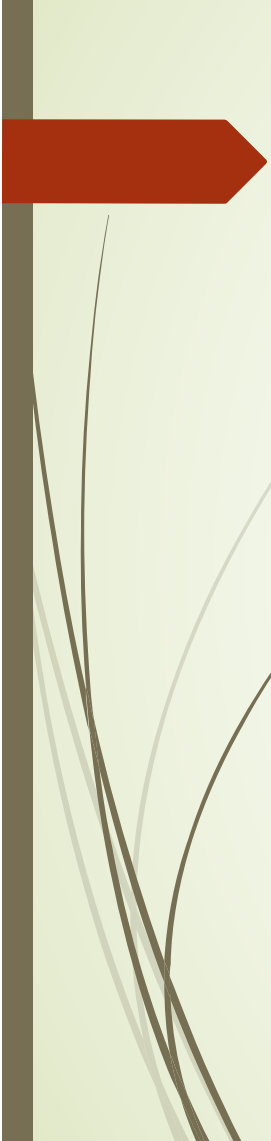
La somma di due numeri naturali

- Pensandoci bene, potremmo descrivere il procedimento per calcolare la “somma in colonna” di due numeri naturali nel modo seguente
- 1) posizionati sulla coppia di cifre più a destra, e poni $r = 0$
- 2) fino a quando leggi una coppia di cifre, esegui la somma della coppia di cifre sulle quali sei posizionato, aggiungi r a tale valore e scrivi una cifra del risultato calcolando anche il nuovo valore di r , e poi spostati a sinistra – ossia:
 - se $r = 0$ e le due cifre sono 0 e 0, allora scrivi 0, poni $r = 0$, e spostati di una posizione a sinistra
 - se $r = 1$ e le due cifre sono 0 e 0 e allora scrivi 1, poni $r = 0$, e spostati di una posizione a sinistra
 - ...
 - se $r = 0$ e le due cifre sono 9 e 9, allora scrivi 8, poni $r = 1$, e spostati di una posizione a sinistra
 - se $r = 1$ e le due cifre sono 9 e 9, allora scrivi 9, poni $r = 1$, e spostati di una posizione a sinistra
- [... continua ...]



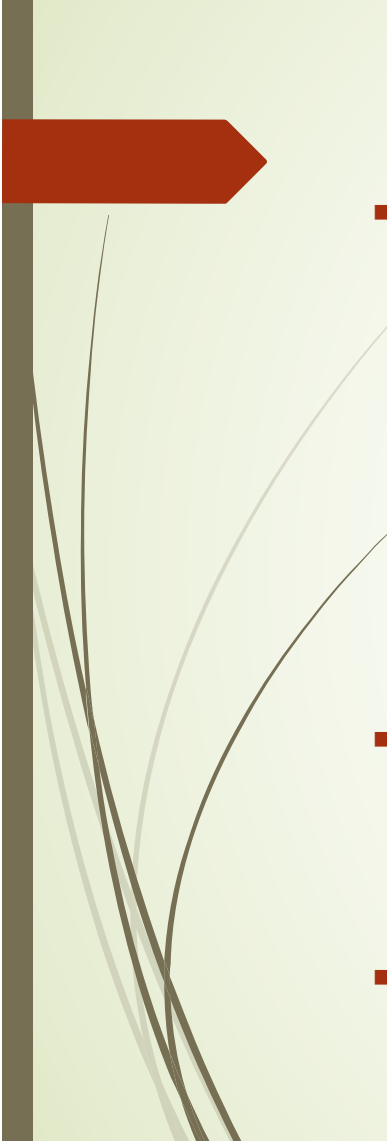
La somma di due numeri naturali

- Pensandoci bene, potremmo descrivere il procedimento per calcolare la “somma in colonna” di due numeri naturali nel modo seguente
- 1) posizionati sulla coppia di cifre più a destra, e poni $r = 0$
- 2) fino a quando leggi una coppia di cifre, esegui la somma della coppia di cifre sulle quali sei posizionato, aggiungi r a tale valore e scrivi una cifra del risultato calcolando anche il nuovo valore di r , e poi spostati a sinistra
- 3) fino a quando leggi una sola cifra (ossia, le cifre di uno dei due numeri sono terminate) aggiungi r ad essa e scrivi una cifra del risultato calcolando anche il nuovo valore di r , e poi spostati a sinistra – ossia,
 - se $r = 0$ e l'unica cifra è 0, allora scrivi 0, poni $r = 0$, e spostati di una posizione a sinistra
 - se $r = 0$ e l'unica cifra è 1, allora scrivi 1, poni $r = 0$, e spostati di una posizione a sinistra
 - ...
 - se $r = 1$ e l'unica cifra è 8, allora scrivi 9, poni $r = 0$, e spostati di una posizione a sinistra
 - se $r = 1$ e l'unica cifra è 9, allora scrivi 0, poni $r = 1$, e spostati di una posizione a sinistra
- [... continua ...]



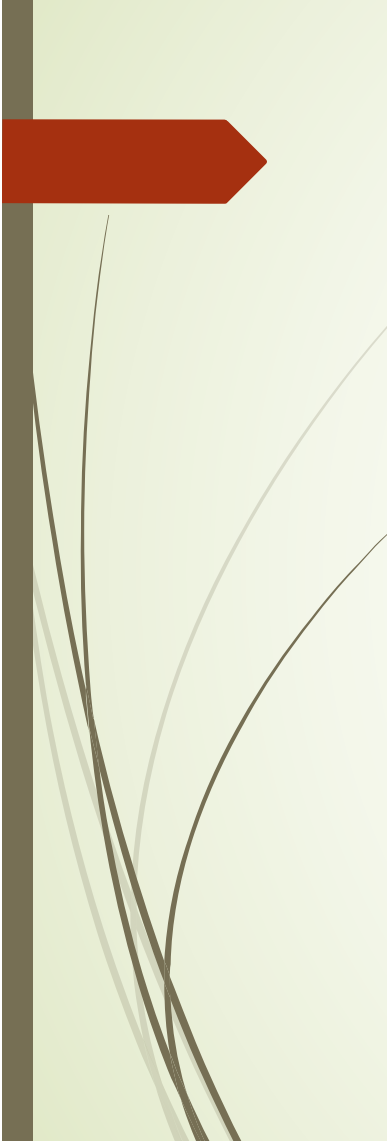
La somma di due numeri naturali

- Pensandoci bene, potremmo descrivere il procedimento per calcolare la “somma in colonna” di due numeri naturali nel modo seguente
- 1) posizionati sulla coppia di cifre più a destra, e poni $r = 0$
- 2) fino a quando leggi una coppia di cifre, esegui la somma della coppia di cifre sulle quali sei posizionato, aggiungi r a tale valore e scrivi una cifra del risultato calcolando anche il nuovo valore di r
- 3) fino a quando leggi una sola cifra (ossia, le cifre di uno dei due numeri sono terminate) aggiungi r ad essa e scrivi una cifra del risultato calcolando anche il nuovo valore di r , e poi spostati a sinistra
- 4) se le cifre di entrambi i numeri sono terminate, allora calcola l'eventuale ultima cifra del risultato e termina – ossia:
 - se $r = 0$ e le cifre di entrambi i numeri sono terminate, allora termina
 - se $r = 1$ e le cifre di entrambi i numeri sono terminate, allora scrivi 1 e termina.



La somma di due numeri naturali

- Ossia, il procedimento per calcolare la “somma in colonna” di due numeri naturali è una sequenza di
 - “se sono vere **certe condizioni** allora esegui **queste azioni**”
 - ad ogni coppia (**certe condizioni**, **queste azioni**) corrisponde un'istruzione
 - dove **certe condizioni** è ciò che viene letto (la coppia di cifre dei due numeri, eventualmente assenti) e il valore del riporto
 - e **queste azioni** è ciò che viene scritto, la modifica del valore del riporto, e lo spostamento
 - o, in alcuni casi, **queste azioni** è l'indicazione che la somma è stata completata (termina)
- Pensandoci bene, questo procedimento potrebbe eseguirlo chiunque sappia leggere e scrivere e distinguere fra destra e sinistra
 - che sono nozioni davvero **elementari**!
 - Su questo non c'è davvero dubbio!
- Ma, pur essendo *istruzioni elementari da un punto di vista intuitivo*, sono quelle appena individuate **istruzioni elementari nel senso indicato da Turing?**

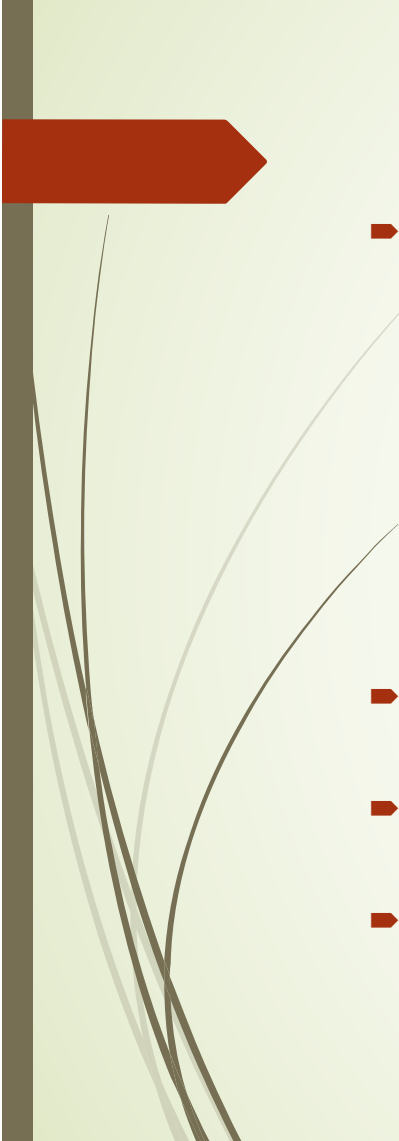


La somma di due numeri naturali

- Ricordiamo che, nell'accezione di Turing, un'istruzione, per potere essere definita *elementare*, deve avere le seguenti caratteristiche:
 - deve essere scelta in un insieme di "poche" istruzioni disponibili
 - deve scegliere l'azione da eseguire all'interno di un insieme di "poche" azioni possibili
 - deve poter essere eseguita ricordando una quantità limitata di dati, ossia, in termini più tecnici, utilizzando una quantità limitata di memoria.
- Ora, abbiamo già visto che nel procedimento che esegue la somma le azioni che vengono eseguite sono due: scrittura di una cifra e spostamento
 - e possiamo ben affermare che esse sono davvero "poche"!
- Ma è vero che il procedimento che esegue la somma ha un insieme di "poche" istruzioni disponibili ciascuna delle quali utilizza una quantità limitata di memoria?
 - Che poi: ma cosa si intende con "poche" e con quantità limitata?

La somma di due numeri naturali

- Ma è vero che il procedimento che esegue la somma ha un insieme di “poche” istruzioni disponibili ciascuna delle quali utilizza una quantità limitata di memoria?
- Riflettiamo:
 - il numero di istruzioni disponibili è pari al numero di coppie di cifre moltiplicato per il numero di possibili valori per il riporto, ossia, $10 \times 10 \times 2 = 200$
 - per sapere quale istruzione dobbiamo eseguire abbiamo bisogno di conoscere le due cifre da sommare e il valore del riporto, ossia, 3 numeri di una cifra
- Ricapitolando: per sommare qualunque coppia di interi (**grandi quanto ci pare**) abbiamo a disposizione **222 istruzioni** (che eseguono 2 azioni) fra le quali scegliere quella da eseguire utilizzando una memoria di 3 cifre
- **Indipendentemente da quanto sono grandi i due numeri** che vogliamo sommare, **sempre 222 istruzioni** (che eseguono 2 azioni) disponibili che utilizzano una memoria di 3 cifre sono!
- **Ossia, il numero di istruzioni, azioni e la quantità di memoria necessaria sono costanti: non dipendono da quello che chiameremo input**
 - chiaro ora cosa si intende con “poche” e con quantità limitata?
 - Chiara, ora, la scelta di Turing delle sue tre caratteristiche!

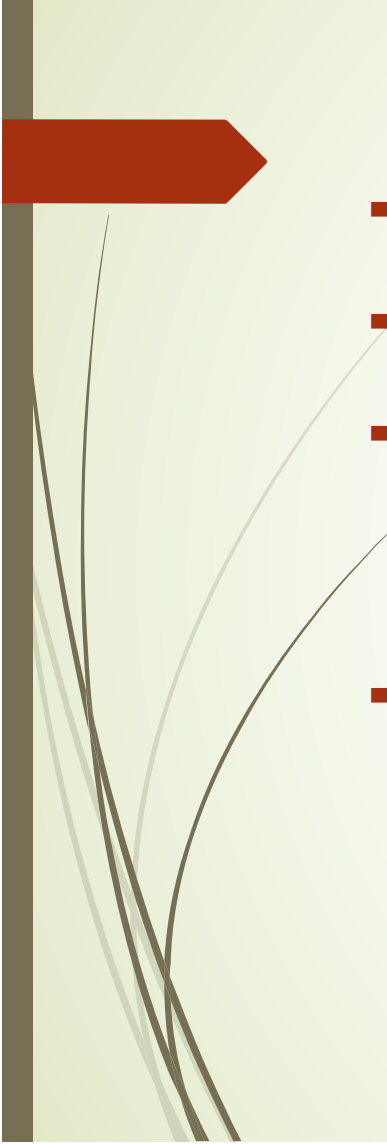


La somma di due numeri naturali

- Il procedimento per calcolare la “somma in colonna” di due numeri naturali è una sequenza di
 - “se sono vere **certe condizioni** allora esegui **queste azioni**”
 - dove **certe condizioni** è ciò che viene letto (la coppia di cifre dei due numeri, eventualmente assenti) e il valore del riporto
 - e **queste azioni** è ciò che viene scritto, la modifica del valore del riporto, e lo spostamento
 - o, in alcuni casi, **queste azioni** è l'indicazione che la somma è stata completata (termina)
- Pensandoci bene, questo procedimento potrebbe eseguirlo chiunque sappia leggere e scrivere e distinguere fra destra e sinistra
- Pensandoci bene, *per eseguire questo procedimento non è necessario nemmeno sapere cosa significa “sommare due numeri naturali”*
- esegui le istruzioni del procedimento e, come per magia, alla fine ti ritrovi con il risultato in mano

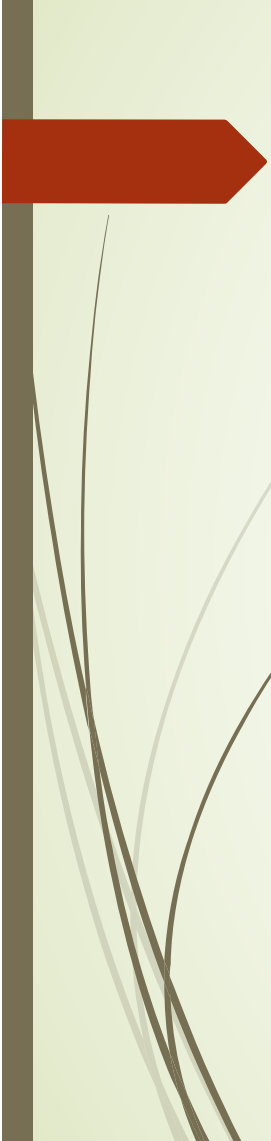
La somma di due numeri naturali

- Il procedimento per calcolare la “somma in colonna” di due numeri naturali è una sequenza di “se sono vere **certe condizioni** allora esegui **queste azioni**”
- Pensandoci bene, per eseguire questo procedimento non è necessario nemmeno sapere cosa significa “sommare due numeri naturali”:
- esegui le istruzioni del procedimento e, come per magia, alla fine ti ritrovi con il risultato in mano!
- Perché, naturalmente, le istruzioni ti dicono, **per ogni condizione possibile, esattamente quali azioni devi eseguire in quelle condizioni**
- questo significa che l'insieme di istruzioni è *non ambiguo*: non può contenere due (o più) istruzioni che, a partire dalle stesse **condizioni**, ti indica diverse **azioni** da eseguire
 - non può succedere, ad esempio, che un'istruzione affermi “se è vero **a** allora scrivi 5” e un'altra istruzione affermi “se è vero **a** allora scrivi 6”
 - altrimenti, quando è vero **a** come devi comportarti tu che vuoi eseguire le istruzioni?



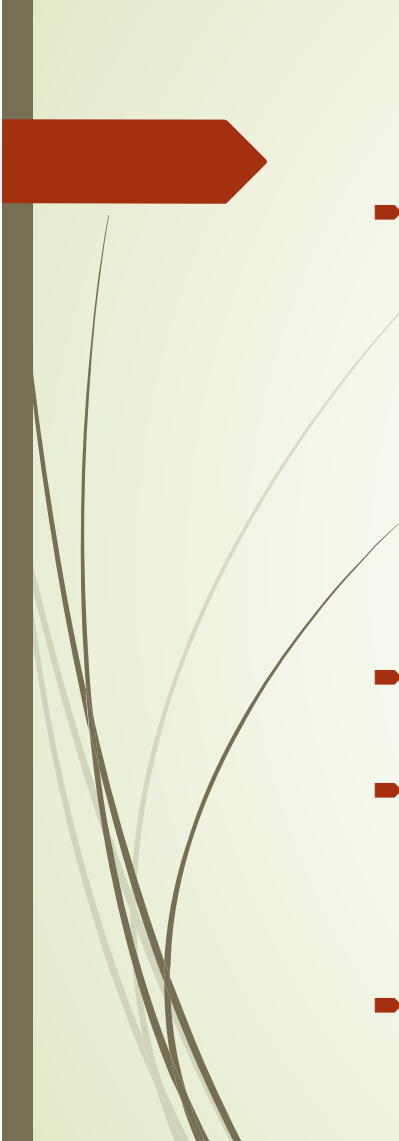
La somma di due numeri naturali

- Il procedimento per calcolare la “somma in colonna” di due numeri naturali è una sequenza di “se sono vere **certe condizioni** allora esegui **queste azioni**”
- Le istruzioni ti dicono, **per ogni condizione possibile, esattamente quali azioni devi eseguire in quelle condizioni**
- questo significa che l'insieme di istruzioni è *non ambiguo*: non può contenere due (o più) istruzioni che, a partire dalle stesse **condizioni**, ti indica diverse **azioni** da eseguire
 - non può succedere, ad esempio, che un'istruzione affermi “se è vero **a** allora scrivi 5” e un'altra istruzione affermi “se è vero **a** allora scrivi 6”
- E, dunque, **l'ordine in cui eseguire le istruzioni è indicato implicitamente nel meccanismo stesso del “se ... allora ...”**
 - in ogni istante devi eseguire l'unica istruzione che è possibile eseguire, fino a quando non incontri un'istruzione che ti dice di terminare
 - non puoi fare altro!



La somma di due numeri naturali

- Il procedimento per calcolare la “somma in colonna” di due numeri naturali è una sequenza di “se sono vere **certe condizioni** allora esegui **queste azioni**”
- Pensandoci bene, per eseguire questo procedimento non è necessario nemmeno sapere cosa significa “sommare due numeri naturali”:
- esegui le istruzioni del procedimento e, come per magia, alla fine ti ritrovi con il risultato in mano!
- Attenzione, però: per ottenere il risultato **devi** eseguire le istruzioni
 - ossia, ogni volta che si verificano quelle **condizioni** tu quelle **azioni** **devi** eseguirle
 - senza se e senza ma, le esegui e basta!
- Cioè, le istruzioni sono una sorta di ordini
 - loro ti dicono di fare qualcosa e tu lo fai!
- Questa idea di istruzione, nata dall'analisi di Turing, è alla base di molti linguaggi di programmazione che, proprio per questo, vengono detti **imperativi**
 - il C, il Fortran, ma anche Java o Python...



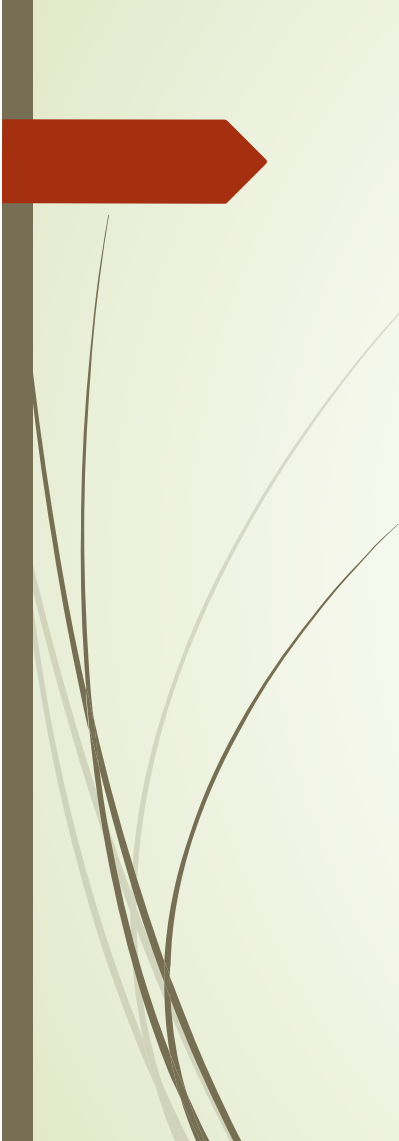
La somma di due numeri naturali

- Il procedimento per calcolare la “somma in colonna” di due numeri naturali è una sequenza di
 - “se sono vere **certe condizioni** allora esegui **queste azioni**”
 - dove **certe condizioni** è ciò che viene letto (la coppia di cifre dei due numeri, eventualmente assenti) e il valore del riporto
 - e **queste azioni** è ciò che viene scritto, la modifica del valore del riporto, e lo spostamento
 - o, in alcuni casi, **queste azioni** è l'indicazione che la somma è stata completata (termina)
- Pensandoci bene, questo procedimento potrebbe eseguirlo chiunque sappia leggere e scrivere e distinguere fra destra e sinistra
- Pensandoci bene, *per eseguire questo procedimento non è necessario nemmeno sapere cosa significa “sommare due numeri naturali”*
 - esegui le istruzioni del procedimento e, come per magia, alla fine ti ritrovi con il risultato in mano
- *cioè, questo procedimento potrebbe anche essere eseguito da un automa*



Risolvere automaticamente un problema

- ▶ Eccoci al nocciolo della questione:
 - ▶ informalmente, *risolvere automaticamente un problema* significa progettare un **procedimento** che risolve **tutte** le istanze di quel problema e che *può essere eseguito da un automa*
 - ▶ ossia, da un esecutore che può non avere alcuna idea del problema né del significato delle istruzioni contenute nel procedimento
- ▶ Il resto della prima parte di questo modulo è dedicato a formalizzare questo concetto informale



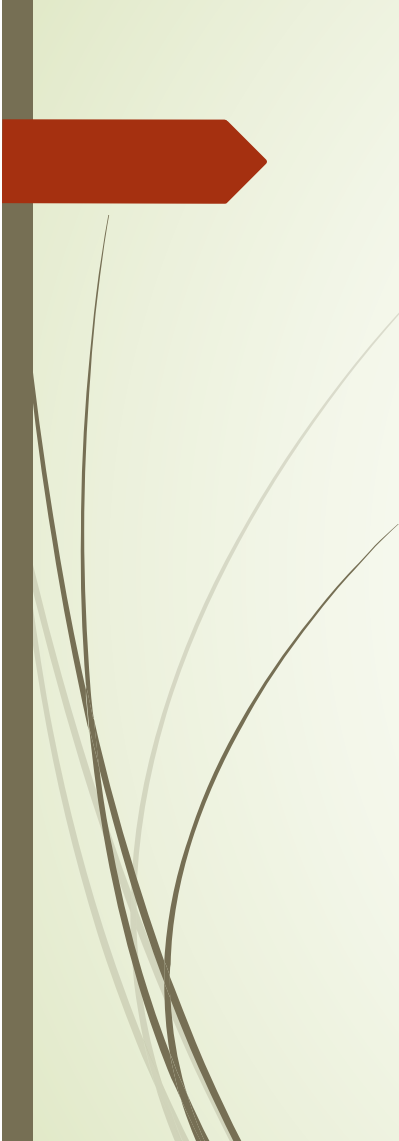
Un nuovo linguaggio

- Ripensiamo alla somma di due numeri naturali:
- 1) il procedimento che abbiamo visto è costituito di sole istruzioni "se sono vere **certe condizioni** allora esegui **queste azioni**"
 - ripetute fino a quando non si incontra il comando "termina"
- 2) in ciascuna istruzione le **azioni** da eseguire sono le 3 azioni seguenti
 - la scrittura di una cifra, la (eventuale) modifica del riporto, il movimento a sinistra per considerare le successive due cifre da sommare
- 3) infine, le **condizioni** di ognuna delle istruzioni dipendono da due tipi di parametri
 - il valore del riporto
 - le due cifre da sommare
- NOTA: mentre le due cifre da sommare le troviamo scritte sul foglio sul quale abbiamo indicato (in colonna) i due numeri che vogliamo sommare
- il valore del riporto lo teniamo a mente ad ogni coppia di cifre sommate
 - è, cioè, qualcosa che caratterizza il nostro "**stato interiore**"



Un nuovo linguaggio...

- ▶ In virtù delle osservazioni 1), 2) e 3), possiamo scrivere il nostro procedimento in forma più compatta
 - ▶ poiché utilizziamo sole istruzioni “se *condizione* allora *azione*” possiamo anche evitare di scrivere “se ... allora ...” ogni santa volta
 - ▶ e scrivere, di seguito, le due condizioni seguite dalle tre azioni
- ▶ così, ad esempio, l'istruzione
 - ▶ se $r = 0$ e le due cifre sono 4 e 6, allora scrivi 0, poni $r = 1$, e spostati di una posizione a sinistra
- ▶ diventa
 - ▶ $\langle q_0, (4, 6), 0, q_1, \text{sinistra} \rangle$
- ▶ dove q_0 e q_1 sono due simboli che indicano, rispettivamente, $r = 0$ e $r = 1$
- ▶ OSSERVAZIONE: in questo esempio sembrerebbe che anche “sinistra” possa essere omesso; vedremo che questa specifica, invece, occorre tenerla
- ▶ [... continua ...]

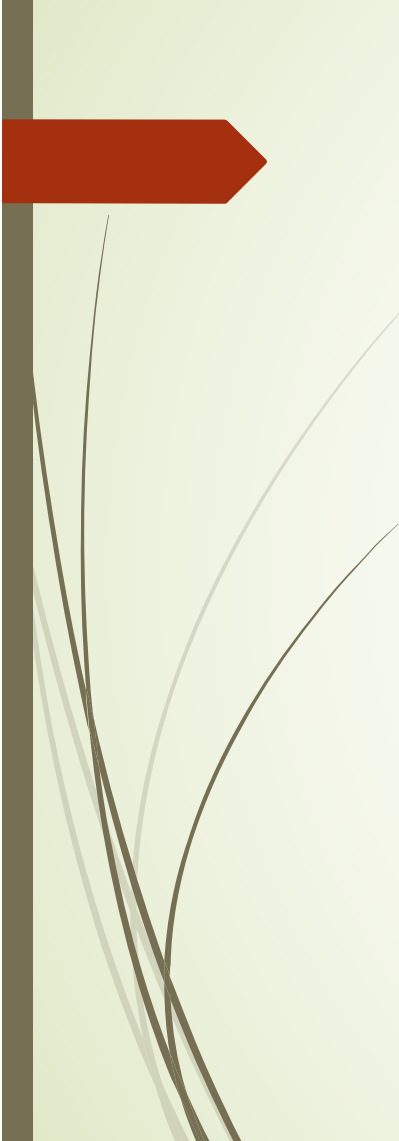


Un nuovo linguaggio...

- In virtù delle osservazioni 1), 2) e 3), possiamo scrivere il nostro procedimento in forma più compatta
- e l'istruzione
 - se $r = 1$ e l'unica cifra è 5, allora scrivi 6, poni $r = 0$, e spostati di una posizione a sinistra
- nella quale le cifre di uno degli operandi sono terminate, diventa la coppia di istruzioni
 - $\langle q_1, (5, \square), 6, q_0, \text{sinistra} \rangle$
 - $\langle q_1, (\square, 5), 6, q_0, \text{sinistra} \rangle$
- dove il simbolo $\square$ indica che non viene letto alcunché o che non deve essere scritto alcunché
- e abbiamo due diverse istruzioni perché l'operando le cui cifre sono terminate può essere il primo o il secondo
- [... continua ...]

Un nuovo linguaggio...

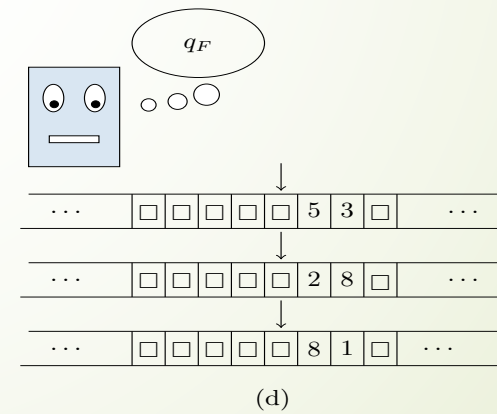
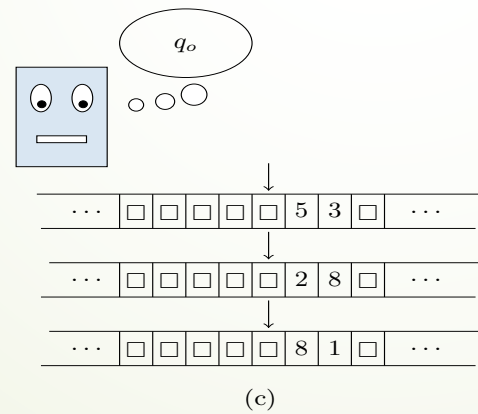
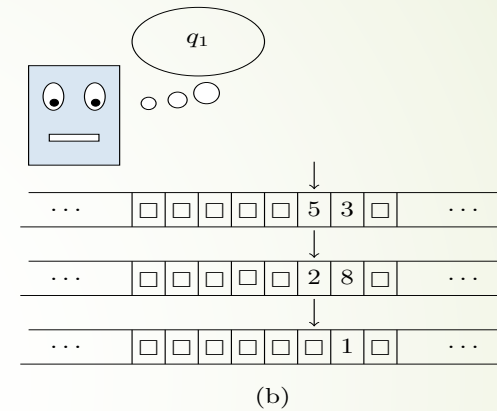
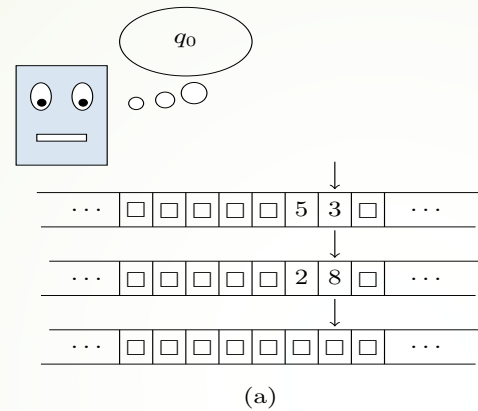
- In virtù delle osservazioni 1), 2) e 3), possiamo scrivere il nostro procedimento in forma più compatta
- e, infine, le istruzioni
 - se $r = 1$ e le cifre di entrambi i numeri sono terminate, allora scrivi 1 e termina
 - se $r = 0$ e le cifre di entrambi i numeri sono terminate, allora termina
- diventano, rispettivamente
 - $\langle q_1, (\square, \square), 1, q_F, \text{fermo} \rangle$
 - $\langle q_0, (\square, \square), \square, q_F, \text{fermo} \rangle$
- dove q_F è lo “*stato interiore*” che permette all'esecutore di comprendere che non deve più eseguire alcuna azione
 - ossia, non si deve “tornare al punto 2)”
- e qui l'utilizzo di “fermo” mostra anche perché è necessario specificare come ci si deve muovere



... e una macchina che lo comprende

- Possiamo, a questo punto, rappresentare graficamente l'esecuzione del procedimento che calcola la somma di due numeri qualsiasi
 - ad esempio, i numeri 53 e 28
- per farlo, immaginiamo di disporre di una sorta di automa
 - che rappresentiamo come una specie di "testa robotizzata"
 - e che può trovarsi in uno di tre possibili "*stati interiori*": q_0 , q_1 e q_F
- che utilizza, per leggere e scrivere , tre nastri
 - suddivisi ciascuno in un numero infinito di celle
 - tali che ciascuna cella, in ogni istante, può contenere o una cifra (un numero compreso fra 0 e 9) oppure può essere vuota (e indichiamo con  il simbolo di cella vuota)
- e tre testine di lettura/scrittura
- Non appena viene scritto qualcosa sui nastri, dipendentemente dallo "stato interiore" dell'automata e da quello che viene letto, l'automata inizia a **computare** – ossia a eseguire le quintuple del procedimento

... e una macchina che lo comprende



Quasi una macchina di Turing

- ▶ Quella che abbiamo visto è *quasi* una descrizione informale di una macchina di Turing
- ▶ *quasi*, perché abbiamo utilizzato tre nastri e in una macchina di Turing occorre descrivere cosa viene letto (nelle **condizioni**) e cosa viene scritto (nelle **azioni**) su ogni nastro
- ▶ così che l'istruzione
se $r = 0$ e le due cifre sono 4 e 6, allora scrivi 0, poni $r = 1$, spostati di una posizione a sinistra e torna al punto 2)
- ▶ diventa $\langle q_0, (4, 6, \square), (4, 6, 0), q_1, \text{sinistra} \rangle$
 - ▶ che specifica cosa deve essere scritto sui 3 nastri $(4, 6, \square)$ e con cosa questi tre elementi devono essere sovrascritti $(4, 6, 0)$
- ▶ poiché specifica 2 condizioni e 3 azioni, essa prende il nome di **quintupla**
- ▶ e, quelli che abbiamo chiamato sino ad ora "*stati interiori*", si chiamano propriamente **stati interni**
- ▶ e l'esecuzione delle quintuple su un insieme fissato di dati (come nella figura) si chiama **computazione**



Calcolabilità

- ▀ Quella che abbiamo visto è, dunque, una descrizione informale di una macchina di Turing
 - ▀ con la 'm' minuscola
- ▀ che è la *descrizione di un procedimento di risoluzione di un problema* espresso nel *linguaggio definito da Alan Turing*
- ▀ linguaggio che costituisce un *modello di calcolo*: il modello **Macchina di Turing**
 - ▀ con la 'M' maiuscola
- ▀ E tutto ciò, che è necessario per parlare di Calcolabilità, inizieremo a vederlo *formalmente* nella prossima lezione