



Lezione 30 – il teorema di Cook-Levin

Lezione del 21/05/2025

La struttura di NP

- Come abbiamo già detto, la dispensa 9 studia due questioni “strutturali” relative alla classe NP
 - la struttura dei problemi che popolano la classe NP
 - la struttura della classe NP
- Sin qui, ci siamo occupati di studiare la struttura dei problemi che popolano NP
 - e abbiamo trovato un modo alternativo per dimostrare che un problema è in NP
- In questa lezione ci occupiamo della seconda questione: vogliamo capire se i problemi che popolano NP sono tutti uguali, per quel che riguarda la loro complessità, oppure ce ne sono alcuni più “difficili di” altri
- E qui, sono certa, starete scalpitando sulle vostre sedie...
 - ma come tutti uguali?! – starete dicendo
 - perché $P \subseteq NP$, e quindi dentro NP ci sono, sicuramente, problemi trattabili computazionalmente
 - ma dentro NP ci sono anche problemi che in P non si riesce proprio a collocarli
- La domanda, ora, è: **fra i problemi in NP che non si riesce a collocare in P, ce ne sono alcuni più “difficili” di altri?**

La struttura di NP

- La domanda, ora, è: **fra i problemi in NP che non si riesce a collocare in P, ce ne sono alcuni più “difficili” di altri?**
- E qui, di nuovo, starete scalpitando sulle vostre sedie...
 - ma certo che ci sono problemi più difficili degli altri, in NP!
 - Sono i problemi NP-completi!
 - Perché, ce lo ricordiamo bene, se un problema NP-completo appartenesse alla classe P allora sarebbe $P = NP$!
- Perché, ricordiamo, un problema (decisionale) Γ è NP-completo se
 - $\Gamma \in NP$ e per ogni altro problema $\Gamma_1 \in NP$, si ha che $\Gamma_1 \leq \Gamma$
 - e P è chiusa rispetto a $\leq$
- Bene, tutto giusto: i problemi NP-completi sono i problemi “più difficili” in NP
- Certo, ammesso che esistano
- Perché: chi ce lo dice che esiste almeno un problema NP-completo?
- Ce lo dice il **Teorema di Cook-Levin** !

Il Teorema di Cook-Levin

- Ve lo ricordate il (caro, vecchio) problema SAT?
- “ dati un insieme X di variabili booleane ed un predicato f , definito sulle variabili in X e in forma congiuntiva normale, decidere se esiste una assegnazione a di valori in $\{\text{vero}, \text{falso}\}$ alle variabili in X tale che $f(a(X))=\text{vero}$ “
- Dove, ricordiamo, un predicato f è in forma congiuntiva normale se
 - f è la congiunzione di un certo numero di clausole: $f = c_1 \wedge c_2 \dots \wedge c_m$
 - e ciascuna c_j è la disgiunzione ($\vee$) di letterali, ad esempio $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4$
- Ebbene, il Teorema di Cook-Levin dice, semplicemente, che
- **TEOREMA di Cook-Levin:** SAT è NP-completo
- Un enunciato facile facile...

Il Teorema di Cook-Levin

- **TEOREMA di Cook-Levin:** SAT è NP-completo
- Un enunciato facile facile...
- Per dimostrarlo occorre mostrare che è possibile ridurre a SAT **ogni** problema in NP
- ossia, dobbiamo prendere un **qualsiasi** problema Γ in NP mostrare come trasformare le sue istanze in istanze di SAT in modo tale che
 - se x è un'istanza sì di Γ allora l'istanza nella quale x viene trasformata è un'istanza sì di SAT
 - se x è un'istanza no di Γ allora l'istanza nella quale x viene trasformata è un'istanza no di SAT
- Ma in NP troviamo problemi in ambiti diversissimi
 - problemi di acquisto di biglietti aerei senza spendere una fortuna
 - problemi di suddivisione di oggetti sui due piatti di una bilancia mantenendoli in equilibrio
 - problemi di piastrellamento di un pavimento senza lasciare spazi scoperti
 - problemi di scelta di rappresentanti
 - ...
- Come facciamo a mostrare come trasformare una **qualsiasi** istanza di un **qualsiasi** problema in NP in un'istanza di SAT?

Il Teorema di Cook-Levin

- **TEOREMA di Cook-Levin:** SAT è NP-completo
- Come facciamo a mostrare come trasformare un *qualsiasi* problema in NP a SAT se i problemi in NP sono così diversi gli uni dagli altri?
- Semplice: sfruttiamo l'unica caratteristica che tutti i problemi in NP hanno in comune: l'appartenere ad NP!
- Ossia la caratteristica di essere accettati da una macchina di Turing non deterministica in tempo polinomiale
- Consideriamo, allora, un generico problema $\Gamma \in \text{NP}$ e sia $L_\Gamma \subseteq \{0,1\}^*$ il linguaggio contenente la codifica ragionevole delle istanze sì di Γ
- **e cerchiamo di descrivere sotto forma di espressione booleana il predicato " $x \in L_\Gamma$ "**
 - per il momento, ci disinteressiamo della forma congiuntiva normale
 - **la dimostrazione che vi presento in questa lezione è diversa da quella sulle dispense**

Il Teorema di Cook-Levin

- Consideriamo un generico problema $\Gamma \in \text{NP}$ e sia $L_\Gamma \subseteq \{0,1\}^*$ il linguaggio contenente la codifica ragionevole delle istanze sì di Γ
- e cerchiamo di descrivere sotto forma di espressione booleana il predicato " $x \in L_\Gamma$ "**
- sia NT_Γ una macchina di Turing non deterministica ad un nastro che accetta, anzi, che decide, L_Γ in tempo polinomiale: ossia, esiste un polinomio p tale che, per ogni $x \in \{0,1\}^*$
 - $\text{ntime}(\text{NT}_\Gamma, x) \leq p(|x|)$
 - $\text{NT}_\Gamma(x) = q_A$ se $x \in L_\Gamma$
 - $\text{NT}_\Gamma(x) \neq q_A$ se $x \notin L_\Gamma$
- L'affermazione " $x \in L_\Gamma$ " è logicamente equivalente all'affermazione
 **$\gamma(x) =$ " x (e nient'altro che x) è scritto sul nastro di NT_Γ
e la testina di NT_Γ è posizionata sul primo carattere di x
e NT_Γ è nel suo stato iniziale,
e esiste una sequenza di al più $p(|x|)$ quintuple di NT_Γ che
possono essere eseguite una di seguito all'altra e portano la
macchina nello stato q_A "**
- cioè $x \in L_\Gamma$ se e soltanto se $\gamma(x)$ è vera

Da computazione a espressione

- $x \in L_T$ se e soltanto se $\gamma(x)$ è vera
- non resta che **descrivere $\gamma(x)$ sotto forma di una espressione booleana $E(x)$ che sia soddisfacibile se e soltanto se $\gamma(x)$ è vera**
- **$E(x)$ deve descrivere una computazione di NT_T che ha inizio con x scritto sul suo nastro**
- e, poiché ogni computazione di ogni macchina di Turing è una sequenza di *stati globali*,
- per costruire **$E(x)$** è necessario introdurre le variabili booleane che descrivano, per ogni passo t della computazione (con $0 \leq t \leq p(|x|)$) lo *stato globale* in cui si troverebbe NT_T al passo t della computazione $NT_T(x)$:
 - un insieme N di variabili booleane che permettano di rappresentare il carattere contenuto in ciascuna cella del nastro di lavoro di NT_T ad ogni passo della computazione $NT_T(x)$;
 - un insieme M di variabili booleane che permettano di rappresentare lo stato interno di NT_T ad ogni passo della computazione $NT_T(x)$;
 - un insieme R di variabili booleane che permettano di rappresentare la cella del nastro di lavoro sulla quale è posizionata la testina di NT_T ad ogni passo della computazione $NT_T(x)$.
- Vediamo, uno alla volta, questi insiemi di variabili
 - insieme alle condizioni che devono soddisfare perché rappresentino quel che devono rappresentare

Variabili per lo stato interno

- Iniziamo a descrivere l'insieme M di variabili booleane che permettono di rappresentare lo stato interno di NT_{Γ} ad ogni passo della computazione $NT_{\Gamma}(x)$
- Sia $Q = \{q_0, q_1, q_2, \dots, q_k\}$ l'insieme degli stati di NT_{Γ} ,
 - ove q_0 è lo stato iniziale, $q_1 = q_A$ e $q_2 = q_R$
- L'insieme M di variabili, insieme ad una porzione E_M dell'espressione $E(x)$ che stiamo costruendo, servono a descrivere in quale stato interno si trova NT_{Γ} ad ogni passo della computazione $NT_{\Gamma}(x)$: ciò che vogliamo è che
 - ogni volta che i valori assegnati alle variabili in M fanno assumere ad E_M il valore vero,
 - osservando i valori assegnati alle variabili contenute in M , dobbiamo essere in grado di rispondere a domande del tipo "è q_4 lo stato interno di NT_{Γ} al passo 25 della computazione $NT_{\Gamma}(x)$?".
- Per ogni passo t (con $0 \leq t \leq p(|x|)$), e per ogni $i \in \{0, 1, \dots, k\}$, M contiene una variabile booleana M_i^t :
$$M = \{M_i^t : 0 \leq t \leq p(|x|) \wedge i \in \{0, 1, \dots, k\}\}$$
- con il seguente significato: assegnando a M_i^t il valore vero rappresentiamo il fatto che, al passo t della computazione $NT_{\Gamma}(x)$, la macchina NT_{Γ} si trova nello stato q_i

Variabili per lo stato interno

- Per ogni passo t (con $0 \leq t \leq p(|x|)$), e per ogni $i \in \{0, 1, \dots, k\}$, M contiene una variabile booleana M^t_i :

$$M = \{M^t_i : 0 \leq t \leq p(|x|) \wedge i \in \{0, 1, \dots, k\}\}$$

- con il seguente significato: **assegnando a M^t_i il valore vero rappresentiamo il fatto che, al passo t della computazione $NT_T(x)$, la macchina NT_T si trova nello stato q_i**
- affinché le variabili in M descrivano effettivamente lo stato interno di NT_T ad ogni passo della computazione $NT_T(x)$, dobbiamo imporre che esse siano coerenti:
 - ad ogni passo della computazione** $NT_T(x)$ la macchina NT_T si trova in uno (ed esattamente uno!) dei suoi stati interni
 - allora dobbiamo fare in modo che possano essere prese in considerazione solo quelle assegnazioni di valori alle variabili in M tali che, **per ogni t compreso fra 0 e $p(|x|)$, ad una e una sola delle variabili $M^t_0, M^t_1, \dots, M^t_k$ sia assegnato il valore vero.**
- A questo scopo, introduciamo $p(|x|)+1$ espressioni: **$E^0_M, E^1_M, \dots, E^{p(|x|)}_M$**
- dove **E^t_M** è l'espressione nelle variabili in M che corrisponde all'affermazione **al passo t di $NT_T(x)$ la macchina NT_T si trova in uno (ed esattamente uno!) dei suoi stati interni**

Variabili per lo stato interno

- E_M^t è l'espressione nelle variabili in M che corrisponde all'affermazione **al passo t di $NT_r(x)$ la macchina NT_r si trova in uno (ed esattamente uno!) dei suoi stati interni**

- Allora,

$$E_M^t = [M_0^t \wedge \neg M_1^t \wedge \neg M_2^t \wedge \dots \wedge \neg M_k^t]$$

NT_r , al passo t di $NT_r(x)$, si trova nello stato q_0 ...

$$\vee [M_1^t \wedge \neg M_0^t \wedge \neg M_2^t \wedge \dots \wedge \neg M_k^t]$$

... oppure si trova nello stato q_1 ...

$$\vee [M_2^t \wedge \neg M_0^t \wedge \neg M_1^t \wedge \dots \wedge \neg M_k^t]$$

... oppure si trova nello stato q_2 ...

$$\vee \dots$$

$$\vee [M_k^t \wedge \neg M_0^t \wedge \neg M_1^t \wedge \dots \wedge \neg M_{k-1}^t]$$

... oppure si trova nello stato q_k

- Che assume il valore **vero** se e soltanto se ad esattamente una delle variabili $M_0^t, M_1^t, M_2^t, \dots, M_k^t$ è assegnato il valore **vero**

Variabili per la posizione della testina

- Secondo step: descriviamo l'insieme R di variabili booleane che permettono di rappresentare la posizione della testina di NT_T ad ogni passo della computazione $NT_T(x)$
- Osserviamo che, poiché NT_T ha a disposizione $p(|x|)$ passi per accettare x , allora non utilizza più di $p(|x|)$ celle del nastro
- allora, assumiamo che $NT_T(x)$ utilizzi le celle $1, 2, \dots, p(|x|)$
- L'insieme R di variabili, insieme ad una porzione E_R dell'espressione $E(x)$ che stiamo costruendo, servono a descrivere su quale cella del nastro di NT_T è posizionata la testina ad ogni passo della computazione $NT_T(x)$: ciò che vogliamo è che
 - ogni volta che i valori assegnati alle variabili in R fanno assumere ad E_R il valore vero,
 - osservando i valori assegnati alle variabili contenute in R , dobbiamo essere in grado di rispondere a domande del tipo “la testina di NT_T è posizionata sulla cella 51 al passo 86 della computazione $NT_T(x)$?”.

Variabili per la posizione della testina

- Secondo step: descriviamo l'insieme R di variabili booleane che permettono di rappresentare la posizione della testina di NT_r ad ogni passo della computazione $NT_r(x)$

- Per ogni passo t (con $0 \leq t \leq p(|x|)$), e per ogni $i \in \{1, \dots, p(|x|)\}$, R contiene una variabile booleana R_i^t :

$$R = \{R_i^t : 0 \leq t \leq p(|x|) \wedge 1 \leq i \leq p(|x|)\}$$

- con il seguente significato: **assegnando a R_i^t il valore vero rappresentiamo il fatto che, al passo t della computazione $NT_r(x)$, la testina di NT_r si trova sulla cella i**
- affinché le variabili in R descrivano effettivamente la posizione della testina di NT_r ad ogni passo della computazione $NT_r(x)$, dobbiamo imporre che esse siano coerenti:
 - ad ogni passo della computazione $NT_r(x)$ la testina di NT_r è posizionata su una (ed esattamente una!) delle celle del suo nastro
 - allora dobbiamo fare in modo che possano essere prese in considerazione solo quelle assegnazioni di valori alle variabili in R tali che, per ogni t compreso fra 0 e $p(|x|)$, ad una e una sola delle variabili $R_1^t, R_2^t, \dots, R_{p(|x|)}^t$ sia assegnato il valore **vero**.
- Come prima, a questo scopo introduciamo $p(|x|)+1$ espressioni: $E_R^1, \dots, E_R^{p(|x|)}$

Variabili per la posizione della testina

- E_R^t è l'espressione nelle variabili in R che corrisponde all'affermazione **al passo t di $NT_r(x)$ la testina di NT_r è posizionata su una (ed esattamente una!) delle celle del suo nastro**

- Allora,

$E_R^t = [R_1^t \wedge \neg R_2^t \wedge \neg R_3^t \wedge \dots \wedge \neg R_{p(|x|)}^t]$ **la testina di NT_r , al passo t di $NT_r(x)$, si trova sulla cella 1...**

$\vee [R_2^t \wedge \neg R_1^t \wedge \neg R_3^t \wedge \dots \wedge \neg R_{p(|x|)}^t]$ **... oppure si trova sulla cella 2 ...**

$\vee [R_3^t \wedge \neg R_1^t \wedge \neg R_2^t \wedge \dots \wedge \neg R_{p(|x|)}^t]$ **... oppure si trova sulla cella 3 ...**

$\vee \dots$

$\vee [R_{p(|x|)}^t \wedge \neg R_1^t \wedge \neg R_2^t \wedge \dots \wedge \neg R_{p(|x|)-1}^t]$ **... oppure si trova sulla cella p(|x|)**

- Che assume il valore **vero** se e soltanto se ad esattamente una delle variabili $R_1^t, R_2^t, R_3^t, \dots, R_{p(|x|)}^t$ è assegnato il valore vero

Variabili per il contenuto delle celle

- ▶ Terzo step: descriviamo l'insieme N di variabili booleane che permettono di rappresentare il carattere contenuto in ciascuna cella del nastro di NT_Γ ad ogni passo della computazione $NT_\Gamma(x)$
- ▶ Ricordiamo che NT_Γ utilizza al più $p(|x|)$ celle del nastro che assumiamo essere le celle $1, 2, \dots, p(|x|)$
- ▶ e che $L_\Gamma \subseteq \{0,1\}^*$
 - ▶ e, perciò, una qualsiasi cella del nastro di NT_Γ , ad un qualunque passo della computazione $NT_\Gamma(x)$, può contenere 0 oppure 1 oppure $\square$
- ▶ L'insieme di variabili N , insieme ad una porzione E_N dell'espressione **$E(x)$** che stiamo costruendo, servono a descrivere quale simbolo è contenuto in ogni cella del nastro di NT_Γ ad ogni passo della computazione $NT_\Gamma(x)$: ciò che vogliamo è che
 - ▶ **ogni volta che i valori assegnati alle variabili in N fanno assumere ad E_N il valore vero,**
 - ▶ **osservando i valori assegnati alle variabili contenute in N , dobbiamo essere in grado di rispondere a domande del tipo "è 1 il simbolo contenuto nella cella 12 di NT_Γ al passo 25 della computazione $NT_\Gamma(x)$?".**

Variabili per il contenuto delle celle

- Terzo step: descriviamo l'insieme N di variabili booleane che permettono di rappresentare il carattere contenuto in ciascuna cella del nastro di NT_T ad ogni passo della computazione $NT_T(x)$
- Per ogni passo t (con $0 \leq t \leq p(|x|)$), per ogni $i \in \{0, 1, \dots, p(|x|)\}$, e per ogni $j \in \{0, 1, \square\}$, N contiene una variabile booleana N_{ij}^t :
$$N = \{ N_{ij}^t : 0 \leq t \leq p(|x|) \wedge 1 \leq i \leq p(|x|) \wedge j \in \{0, 1, \square\} \}$$
- con il seguente significato: **assegnando a N_{ij}^t il valore vero rappresentiamo il fatto che, al passo t della computazione $NT_T(x)$, la cella i del nastro di NT_T contiene il simbolo j**
- affinché le variabili in N descrivano effettivamente i contenuti delle celle del nastro di NT_T ad ogni passo della computazione $NT_T(x)$, dobbiamo imporre che esse siano coerenti:
 - ad ogni passo della computazione $NT_T(x)$ ogni cella di NT_T contiene un simbolo - ed esattamente uno!
 - allora dobbiamo fare in modo che possano essere prese in considerazione solo quelle assegnazioni di valori alle variabili in N tali che, per ogni t compreso fra 0 e $p(|x|)$, e per ogni i compreso fra 1 e $p(|x|)$, ad una e una sola delle variabili $N_{i0}^t, N_{i1}^t, N_{i\square}^t$ sia assegnato il valore **vero**.
- Di nuovo, a questo scopo introduciamo $p(|x|)+1$ espressioni: $E_N^0, E_N^1, \dots, E_N^{p(|x|)}$

Variabili per il contenuto delle celle

- Ma, ora, abbiamo bisogno di un passo intermedio

- Indichiamo con $E^t i_N$ l'espressione nelle variabili in N che corrisponde all'affermazione

**al passo t di $NT_r(x)$ la cella i di NT_r
contiene un elemento (ed esattamente uno!) dell'insieme $\{0, 1, \square\}$**

- $E^t i_N = [N^t_{i0} \wedge \neg N^t_{i1} \wedge \neg N^t_{i\square}]$ **nella cella i di NT_r , al passo t di $NT_r(x)$, si trova il simbolo 0...**

$\vee [N^t_{i1} \wedge \neg N^t_{i0} \wedge \neg N^t_{i\square}]$ **... oppure si trova il simbolo 1...**

$\vee [N^t_{i\square} \wedge \neg N^t_{i0} \wedge \neg N^t_{i1}]$ **... oppure si trova il simbolo $\square$**

- Che assume il valore **vero** se e soltanto se ad esattamente una delle variabili $N^t_{i0}, N^t_{i1}, N^t_{i\square}$ è assegnato il valore vero

Variabili per il contenuto delle celle

- Dunque $E^t i_N$ è l'espressione nelle variabili in R che corrisponde all'affermazione **al passo t di $NT_r(x)$ la cella i di NT_r contiene un elemento (ed esattamente uno!) dell'insieme $\{0, 1, \square\}$**
- $E^t i_N$ assume il valore **vero** se e soltanto se ad esattamente una delle variabili $N_{i0}^t, N_{i1}^t, N_{i\square}^t$ è assegnato il valore vero

- Infine, per ogni t compreso fra 0 e $p(|x|)$, poniamo

$$E^t_N = E^{t1}_N \wedge E^{t2}_N \wedge \dots \wedge E^{tp(|x|)}_N$$

- E^t_N assume il valore **vero** se e soltanto se, **per ogni cella i del nastro di NT , ad esattamente una delle variabili $N_{i0}^t, N_{i1}^t, N_{i\square}^t$ è assegnato il valore vero**
- ossia, **E^t_N assume il valore vero se e soltanto se, per ogni cella i del nastro di NT_r , al passo t di $NT_r(x)$ la cella i di NT_r contiene un elemento (ed esattamente uno!) dell'insieme $\{0, 1, \square\}$**

Ricapitolando...

- Siamo partiti da un generico problema $\Gamma \in \text{NP}$ e dal linguaggio $L_\Gamma \subseteq \{0,1\}^*$ contenente una codifica ragionevole delle istanze sì di Γ
- Abbiamo considerato una macchina di Turing non deterministica NT_Γ che accetta, le parole x in L_Γ in tempo $p(|x|)$ – polinomiale in $|x|$
- E abbiamo osservato che l'affermazione " $x \in L_\Gamma$ " è *logicamente equivalente* all'affermazione
 - $\gamma(x)$ = "x (e nient'altro che x) è scritto sul nastro di NT_Γ
e la testina di NT_Γ è posizionata sul primo carattere di x
e NT_Γ è nel suo stato iniziale,
e esiste una sequenza di al più $p(|x|)$ quintuple di NT_Γ che possono essere eseguite una di seguito all'altra e portano la macchina nello stato q_A "
- cioè $x \in L_\Gamma$ se e soltanto se $\gamma(x)$ è vera
- Ci siamo proposti di **descrivere $\gamma(x)$ sotto forma di espressione booleana $E(x)$ che sia soddisfacibile se e soltanto se $\gamma(x)$ è vera**
- e poiché **$E(x)$** deve descrivere una **computazione di NT_Γ che ha inizio con x scritto sul suo nastro**, ossia, una sequenza di stati globali tale che si passa da uno stato globale al successivo mediante l'esecuzione di una quintupla
- abbiamo definito le variabili booleane che ci permettono di descrivere gli stati globali che compongono la computazione $\text{NT}_\Gamma(x)$ (e le condizioni per la loro consistenza!)
- non ci resta che descrivere configurazione iniziale, stati globali e computazione...

Rappresentare un generico stato globale

- Descriviamo, dunque, all'interno di $E(x)$ gli stati globali che compongono la computazione $NT_T(x)$
- Ma lo abbiamo già fatto!
- Le variabili che descrivono uno stato globale SG_t in cui si trova la macchina NT_T al passo t di una **generica** computazione di $p(|x|)$ passi sono:
 - le variabili $M^t_0, M^t_1, \dots, M^t_k$ per lo stato interno
 - le variabili $R^t_1, R^t_2, \dots, R^t_{p(|x|)}$ per la posizione della testina
 - le variabili $N^t_{10}, N^t_{11}, N^t_{1\Box}, \dots, N^t_{p(|x|)0}, N^t_{p(|x|)1}, N^t_{p(|x|)\Box}$ che il contenuto delle $p(|x|)$ celle del nastro utilizzate durante la computazione
- e gli stati globali di NT_T al passo t di $NT_T(x)$ sono completamente descritti da tutte e sole le assegnazioni di verità che soddisfano $S^t = E^t_M \wedge E^t_R \wedge E^t_N$
- infatti, una assegnazione di verità che soddisfa S^t rappresenta
 - l'unico stato interno in cui si trova NT_T al tempo t , l'unica cella del nastro sulla quale è posizionata la testina di NT_T al tempo t , e l'unico simbolo in $\{0, 1, \Box\}$ contenuto in ciascuna cella del nastro di NT_T al tempo t
- viceversa, dato uno stato globale di NT_T al tempo t , è facile derivare da esso una assegnazione di verità che soddisfa S^t

Rappresentare la computazione $NT_T(x)$

- A questo punto, sappiamo come rappresentare uno stato globale generico e lo stato globale iniziale **della computazione $NT_T(x)$** mediante una assegnazione di verità alle variabili in M , R e N
- dobbiamo rappresentare allo stesso modo le computazioni **della macchina NT_T** che accettano in al più $p(|x|)$ passi
- Ossia: **esiste una sequenza di al più $p(|x|)$ quintuple di NT_T che possono essere eseguite una di seguito all'altra e portano la macchina nello stato q_A**
- Possiamo allora dire che **$NT_T(x)$ è una computazione accettante in $p(|x|)$ passi** se:
 - al passo 0, NT_T esegue una quintupla e
 - al passo 1, NT_T è nello stato q_A oppure esegue una quintupla e
 - al passo 2, NT_T è nello stato q_A oppure esegue una quintupla e
 - ...
 - al passo $p(|x|) - 1$, NT_T è nello stato q_A oppure esegue una quintupla e
 - al passo $p(|x|)$, NT_T è nello stato q_A .

Rappresentare la computazione $NT_{\Gamma}(x)$

- Dobbiamo mostrare come esprimere
 - al passo t , NT_{Γ} è nello stato q_A oppure esegue una quintupla
- Sia $\langle q_{i1}, s1, s2, q_{i2}, m \rangle$ una quintupla di NT_{Γ}
 - con $m = -1$ se la testina si muove a sinistra, $m = 0$ se rimane ferma, $m = +1$ se si muove a destra
- L'affermazione "la quintupla $\langle q_{i1}, s1, s2, q_{i2}, m \rangle$ è eseguita al passo t **mentre la testina è posizionata sulla cella u** " è equivalente all'espressione

$$\mathcal{G}^t(u, \langle q_{i1}, s1, s2, q_{i2}, m \rangle) = M_{i1}^t \wedge R_u^t \wedge N_{us1}^t \wedge N_{us2}^{t+1} \wedge M_{i2}^{t+1} \wedge R_{u+m}^{t+1}$$

- ossia: "al passo t la macchina è nello stato q_{i1} , la testina è posizionata sulla cella u e legge il simbolo $s1$, e al passo $t+1$ la macchina è nello stato q_{i2} , nella cella u è stato scritto $s2$ e la testina è stata spostata sulla cella $u + m$ "
- L'espressione $\mathcal{G}^t(u, \langle q_{i1}, s1, s2, q_{i2}, m \rangle)$ significa: "al passo t , la testina è posizionata sulla cella u e viene eseguita la quintupla $\langle q_{i1}, s1, s2, q_{i2}, m \rangle$ "
- *ma, al passo t , la testina potrebbe essere posizionata su qualunque cella...*

Rappresentare la computazione $NT_{\Gamma}(x)$

- L'affermazione "la quintupla $\langle q_{i1}, s1, s2, q_{i2}, m \rangle$ è eseguita al passo t **mentre la testina è posizionata sulla cella u** " è equivalente all'espressione

$$G^t(u, \langle q_{i1}, s1, s2, q_{i2}, m \rangle) = M_{i1}^t \wedge R_u^t \wedge N_{us1}^t \wedge N_{us2}^{t+1} \wedge M_{i2}^{t+1} \wedge R_{u+m}^{t+1}$$

- L'espressione $G^t(u, \langle q_1, s1, s2, q_2, m \rangle)$ significa: "al passo t , la testina è posizionata sulla cella u e viene eseguita la quintupla $\langle q_1, s1, s2, q_2, m \rangle$ ", *ma, al passo t , la testina potrebbe essere posizionata su qualunque cella...*
- Allora, per esprimere che **"su qualunque cella sia posizionata la testina, la quintupla $\langle q_{i1}, s1, s2, q_{i2}, m \rangle$ è eseguita al passo t "** scriviamo l'espressione

$$G^t(\langle q_{i1}, s1, s2, q_{i2}, m \rangle) = G^t(1, \langle q_{i1}, s1, s2, q_{i2}, m \rangle) \vee G^t(2, \langle q_{i1}, s1, s2, q_{i2}, m \rangle) \vee \dots \\ \vee G^t(p(|x|), \langle q_{i1}, s1, s2, q_{i2}, m \rangle)$$

- che significa "al passo t la macchina è nello stato q_{i1} , la testina è posizionata su una *qualsiasi* cella u (con $1 \leq u \leq p(|x|)$) e legge il simbolo $s1$, e al passo $t+1$ la macchina è nello stato q_{i2} , nella cella u è stato scritto $s2$ e la testina è stata spostata sulla cella $u + m$ "

Rappresentare la computazione $NT_{\Gamma}(x)$

- Per esprimere che "su qualunque cella sia posizionata la testina, la quintupla $\langle q_{i1}, s1, s2, q_{i2}, m \rangle$ è eseguita al passo t " scriviamo l'espressione
$$G^t(\langle q_{i1}, s1, s2, q_{i2}, m \rangle) = G^t(1, \langle q_{i1}, s1, s2, q_{i2}, m \rangle) \vee G^t(2, \langle q_{i1}, s1, s2, q_{i2}, m \rangle) \vee \dots \vee G^t(p(|x|), \langle q_{i1}, s1, s2, q_{i2}, m \rangle)$$

- Se l'insieme delle quintuple di NT_{Γ} è $\{\langle q_{11}, s11, s12, q_{12}, m1 \rangle, \langle q_{21}, s21, s22, q_{22}, m2 \rangle, \dots, \langle q_{h1}, sh1, sh2, q_{h2}, mh \rangle\}$
- allora per esprimere l'affermazione

" al passo t viene eseguita una quintupla di NT_{Γ} "

scriviamo l'espressione

$$G^t = G^t(\langle q_{11}, s11, s12, q_{12}, m1 \rangle) \vee G^t(\langle q_{21}, s21, s22, q_{22}, m2 \rangle) \vee \dots \vee G^t(\langle q_{h1}, sh1, sh2, q_{h2}, mh \rangle)$$

Rappresentare la computazione $NT_{\Gamma}(x)$

- Per esprimere l'affermazione

"**al passo t viene eseguita una quintupla di NT_{Γ}** "
scriviamo l'espressione

$$g^t = g^t(\langle q_{11}, s_{11}, s_{12}, q_{12}, m_1 \rangle) \vee g^t(\langle q_{21}, s_{21}, s_{22}, q_{22}, m_2 \rangle) \vee \dots \\ \dots \vee g^t(\langle q_{h1}, s_{h1}, s_{h2}, q_{h2}, m_2 \rangle)$$

- Allora, per esprimere l'affermazione

- **al passo t , NT_{Γ} è nello stato q_A oppure esegue una quintupla**

- ricordando che $q_A = q_1$

- scriviamo: **$M_1^t \vee g^t$**

Rappresentare la configurazione iniziale di $NT_{\Gamma}(x)$

- Descriviamo, ora, una espressione che andrà a comporre $E(x)$ che permette di descrivere lo stato globale iniziale di $NT_{\Gamma}(x)$, ossia, la prima parte di $\gamma(x)$:

“ x (e nient'altro che x) è scritto sul nastro di NT_{Γ} e la testina di NT_{Γ} è posizionata sul primo carattere di x e NT_{Γ} è nel suo stato iniziale ”

- NT_{Γ} è nel suo stato interno iniziale

- Facile: è sufficiente imporre che ad M^0_0 debba essere assegnato il valore vero

- $\wedge$ la testina di NT_{Γ} è posizionata sul primo carattere di x

- Facile: è sufficiente imporre che ad R^0_1 debba essere assegnato il valore vero

- $\wedge x$ (e nient'altro che x) è scritto sul nastro di NT_{Γ}

- sia $x = x_1 x_2 \dots x_n$ (ovviamente, $x_i \in \{0, 1, \square\}$ per $i = 1, \dots, n$)

- allora, è sufficiente imporre che

- per $i = 1, \dots, n$, ad $N^0_{i x_i}$ debba essere assegnato il valore **vero**

- per $i = n+1, \dots, p(n)$ ad $N^0_{i \square}$ debba essere assegnato il valore **vero**

Rappresentare la configurazione iniziale di $NT_{\Gamma}(x)$

- Descriviamo, ora, una espressione che andrà a comporre $E(x)$ che permette di descrivere lo stato globale iniziale di $NT_{\Gamma}(x)$, ossia, la prima parte di $\gamma(x)$:

“ x (e nient'altro che x) è scritto sul nastro di NT_{Γ} e la testina di NT_{Γ} è posizionata sul primo carattere di x e NT_{Γ} è nel suo stato iniziale ”

- Quindi, lo stato globale iniziale di $NT_{\Gamma}(x)$ è completamente descritto da una assegnazione di verità che soddisfa

$$\mathcal{H} = M^0_0 \wedge R^0_1 \wedge N^0_{1x1} \wedge N^0_{2x2} \wedge \dots \wedge N^0_{n xn} \wedge N^0_{n+1 \square} \wedge N^0_{n+2 \square} \wedge \dots \wedge N^0_{p(n) \square}$$

- esempio: se $x = 1001$,

$$\mathcal{H} = M^0_0 \wedge R^0_1 \wedge N^0_{11} \wedge N^0_{20} \wedge N^0_{30} \wedge N^0_{41} \wedge N^0_{5 \square} \dots \wedge N^0_{p(4) \square}$$

Finalmente, $E(x)$

- Possiamo, infine, mettere insieme tutti i mattoncini che abbiamo sin qui costruito
 - il predicato $\mathcal{H}$ - che assume valore vero se e soltanto se alle variabili in M, R, N vengono assegnati valori di verità corrispondenti alla presenza di x (e nient'altro) sul nastro, alla testina posizionata sulla cella 1, e alla macchina che si trova nello stato interno iniziale
 - per ogni t , il predicato $\mathcal{S}^t$ - che assume valore vero se e solo se alle variabili che descrivono lo stato globale al passo t vengono assegnati valori di verità consistenti (la macchina è in uno ed un solo stato ecc.)
 - per ogni t , il predicato $\mathcal{G}^t$ - che assume valore vero se e solo se alle variabili vengono assegnati valori di verità che descrivono l'esecuzione di una quintupla al passo t
 - ricordando che M^t_1 è la variabile che descrive se al passo t NT_r è nello stato q_A
 - e ricordando che $NT_r(x)$ è una **computazione accettante** se:
 - al passo 0, NT_r esegue una quintupla,
 - e al passo 1, NT_r è nello stato q_A oppure esegue una quintupla e ...
 - al passo $p(|x|) - 1$, NT_r è nello stato q_A oppure esegue una quintupla, e al passo $p(|x|)$, NT_r è nello stato q_A .
- per ottenere l'espressione $E(x)$

$$E(x) = \mathcal{H} \wedge \mathcal{S}^0 \wedge (M^0_1 \vee \mathcal{G}^0) \wedge \mathcal{S}^1 \wedge (M^1_1 \vee \mathcal{G}^1) \wedge \mathcal{S}^2 \wedge \dots \\ \dots \wedge \mathcal{S}^{p(|x|)-1} \wedge (M^{p(|x|)-1}_1 \vee \mathcal{G}^{p(|x|)-1}) \wedge \mathcal{S}^{p(|x|)} \wedge M^{p(|x|)}_1$$

$x \in L_\Gamma$ se e solo se $E(x)$ è soddisfacibile

- ▀ A partire da NT_Γ e da $x \in \{0,1\}^*$ abbiamo ottenuto

$$E(x) = \mathcal{H} \wedge \mathcal{S}^0 \wedge (M^0_1 \vee G^0) \wedge \mathcal{S}^1 \wedge (M^1_1 \vee G^1) \wedge \dots \\ \dots \wedge \mathcal{S}^{p(|x|)-1} \wedge (M^{p(|x|)-1}_1 \vee G^{p(|x|)-1}) \wedge \mathcal{S}^{p(|x|)} \wedge M^{p(|x|)}_1$$

- ▀ Ricordiamo che stiamo mostrando che L_Γ è riducibile polinomialmente a SAT (senza curarci della forma congiuntiva normale)
 - ▀ e che, quindi, abbiamo mostrato come trasformare x in $E(x)$
 - ▀ la macchina NT_Γ gioca il ruolo di costante: non è l'istanza!
- ▀ Dobbiamo, a questo punto, dimostrare che

$x \in L_\Gamma$ se e soltanto se
esiste una assegnazione di verità per le variabili in M, R, N che soddisfa $E(x)$

se $x \in L_T$ allora $E(x)$ è soddisfacibile

- ▀ A partire da NT_T e da $x \in \{0,1\}^*$ abbiamo ottenuto

$$E(x) = \mathcal{H} \wedge \mathcal{S}^0 \wedge (M^0_1 \vee G^0) \wedge \mathcal{S}^1 \wedge (M^1_1 \vee G^1) \wedge \dots \\ \dots \wedge \mathcal{S}^{p(|x|)-1} \wedge (M^{p(|x|)-1}_1 \vee G^{p(|x|)-1}) \wedge \mathcal{S}^{p(|x|)} \wedge M^{p(|x|)}_1$$

- ▀ se $x \in L_T$, allora esiste una computazione di $NT_T(x)$ che termina in q_A in al più $p(|x|)$ passi
- ▀ cioè, esistono
 - ▀ una sequenza di stati globali $SG_0, SG_1, \dots, SG_u$, con $u \leq p(|x|)$
 - ▀ e una sequenza di u quintuple, dove la quintupla t è $\langle q_{t1}, s_{t1}, s_{t2}, q_{t2}, m_t \rangle$, con $0 \leq t \leq u-1$
- ▀ tali che
 - ▀ SG_0 è lo stato globale in cui la macchina è nello stato q_0 , la testina è posizionata sulla cella 1, le prime $|x|$ celle contengono i bit di x , e le rimanenti $p(|x|)-x$ celle contengono $\square$
 - ▀ per $t = 0, \dots, u-1$, lo stato interno di SG_t è q_{t1} e il simbolo letto dalla testina è s_{t1} , e SG_{t+1} è lo stato globale corrispondente all'esecuzione della t -esima quintupla della sequenza a partire da SG_t
 - ▀ lo stato interno di SG_u è q_A

se $x \in L_\Gamma$ allora $E(x)$ è soddisfacibile

- A partire
 - dalla sequenza di stati globali $SG_0, SG_1, \dots, SG_u$, con $u \leq p(|x|)$
 - e dalla sequenza di u quintuple, dove la quintupla i è $\langle q_{i1}, s_{i1}, s_{i2}, q_{i2}, m_i \rangle$, con $0 \leq i \leq u-1$
- costruiamo una assegnazione di verità α che soddisfa

$$E(x) = \mathcal{H} \wedge S^0 \wedge (M^0_1 \vee G^0) \wedge S^1 \wedge (M^1_1 \vee G^1) \wedge \dots \wedge S^u \wedge (M^u_1 \vee G^u) \wedge \\ \dots \wedge S^{p(|x|)-1} \wedge (M^{p(|x|)-1}_1 \vee G^{p(|x|)-1}) \wedge S^{p(|x|)} \wedge M^{p(|x|)}_1$$

- 1: usiamo SG_0 . Poniamo
 - $\alpha(M^0_0) = \alpha(R^0_1) = \text{vero}$
 - per $j = 1, \dots, |x|$, se il bit j di x è 0 poniamo $\alpha(N^0_{j0}) = \text{vero}$ altrimenti poniamo $\alpha(N^0_{j1}) = \text{vero}$
 - per $j = |x|, \dots, p(|x|)$, poniamo $\alpha(N^0_{j\Box}) = \text{vero}$
 - α assegna falso a tutte le altre variabili in M^0, R^0, N^0
 - pertanto, α soddisfa $\mathcal{H} \wedge S^0$

se $x \in L_\Gamma$ allora $E(x)$ è soddisfacibile

- **2: usiamo $SG_1, SG_2, \dots, SG_u$.** Definiamo $\alpha(M_i^t), \alpha(R_i^t), \alpha(N_{ji}^t)$, usando SG^t analogamente a quanto abbiamo fatto al punto 1.
- Questo garantisce che, per ogni $t=1, \dots, u$,
 - esiste uno ed un solo i tale che $\alpha(M_i^t) = \text{vero}$
 - esiste uno ed un solo i tale che $\alpha(R_i^t) = \text{vero}$
 - per ogni $j = 1, \dots, p(|x|)$, esiste uno ed un solo i tale che $\alpha(N_{ji}^t) = \text{vero}$
- e quindi che, per ogni $t=1, \dots, u$, α soddisfa $\mathcal{S}^t$
- **3: usiamo le quintuple.** Poiché per ogni $t = 0, \dots, u-1$ può essere eseguita la quintupla t della sequenza, allora, per ogni $t = 0, \dots, u-1$, α soddisfa $\mathcal{G}^t$
- **4: lo stato interno di SG_u è q_A .** Allora, $\alpha(M_1^u) = \text{vero}$; perciò, benché al passo u non venga eseguita alcuna quintupla, α soddisfa $(M_1^u \vee \mathcal{G}^u)$
- **5: $t > u$.** Per ogni $i = 0, \dots, k$ poniamo $\alpha(M_i^t) = \alpha(M_i^u)$, per ogni $j = 1, \dots, h$ poniamo $\alpha(R_i^t) = \alpha(R_i^u)$, $\alpha(N_{i0}^t) = \alpha(N_{i0}^u)$, $\alpha(N_{i1}^t) = \alpha(N_{i1}^u)$, $\alpha(N_{i\Box}^t) = \alpha(N_{i\Box}^u)$, ed è facile verificare che α soddisfa $\mathcal{S}^t$ e M_1^t
- **Questo dimostra che α soddisfa $E(x)$**

se $E(x)$ è soddisfacibile allora $x \in L_\Gamma$

- A partire da NT_Γ e da $x \in \{0,1\}^*$ abbiamo ottenuto

$$E(x) = \mathcal{H} \wedge \mathcal{S}^0 \wedge (M^0_1 \vee G^0) \wedge \mathcal{S}^1 \wedge (M^1_1 \vee G^1) \wedge \dots \\ \dots \wedge \mathcal{S}^{p(|x|)-1} \wedge (M^{p(|x|)-1}_1 \vee G^{p(|x|)-1}) \wedge \mathcal{S}^{p(|x|)} \wedge M^{p(|x|)}_1$$

- supponiamo, ora, che esista una assegnazione di verità α alle variabili in M, R, N che soddisfa $E(x)$
- ossia, α soddisfa $\mathcal{H}$, $\mathcal{S}^{p(|x|)}$ e $M^{p(|x|)}_1$
- e, inoltre, per ogni $t = 0, 1, \dots, p(|x|)-1$, α soddisfa $\mathcal{S}^t$ e $(M^t_1 \vee G^t)$
- Poiché, ricordiamo, ogni assegnazione di verità che soddisfa $\mathcal{S}^t = E^t_M \wedge E^t_R \wedge E^t_1_N \wedge \dots \wedge E^t_{p(|x|)}_N$ descrive uno stato globale di NT_Γ
 - specificando che, per ogni $t = 0, 1, \dots, p(|x|)-1$, NT_Γ è in uno (ed un solo) stato interno, con la testina posizionata su una (e una sola) cella che contiene un (ed un solo) elemento in $\{0, 1, \square\}$
- allora α descrive una sequenza $SG^1, \dots, SG^{p(|x|)-1}$ di stati globali di NT_Γ
 - dove, per ogni $t = 0, 1, \dots, p(|x|)-1$, SG^t è lo stato descritto da $\alpha(\mathcal{S}^t)$

se $E(x)$ è soddisfacibile allora $x \in L_\Gamma$

- A partire da NT_Γ e da $x \in \{0,1\}^*$ abbiamo ottenuto

$$E(x) = \mathcal{H} \wedge \mathcal{S}^0 \wedge (M^0_1 \vee G^0) \wedge \mathcal{S}^1 \wedge (M^1_1 \vee G^1) \wedge \dots \\ \dots \wedge \mathcal{S}^{p(|x|)-1} \wedge (M^{p(|x|)-1}_1 \vee G^{p(|x|)-1}) \wedge \mathcal{S}^{p(|x|)} \wedge M^{p(|x|)}_1$$

- supponiamo, ora, che esista una assegnazione di verità α che soddisfa $E(x)$
- allora α descrive una sequenza $SG^1, \dots, SG^{p(|x|)-1}$ di stati globali di NT_Γ
- poiché α soddisfa $\mathcal{H}$, $\alpha(\mathcal{S}^0)$ descrive lo stato globale in cui x (e solo x) è scritto sul nastro, NT_Γ è nello stato q_0 , e la testina è posizionata sul carattere più a sinistra dell'input
- inoltre, per ogni $t = 0, 1, \dots, p(|x|)-1$, α soddisfa $(M^t_1 \vee G^t)$
- allora, per ogni $t = 0, 1, \dots, p(|x|)-1$,
 - o viene eseguita una quintupla (se $\alpha(G^t) = \text{vero}$) che fa passare da SG^t a SG^{t+1}
 - oppure NT_Γ è in q_A (se $\alpha(M^t_1) = \text{vero}$)
 - osserviamo che non può accadere $\alpha(G^t) = \text{vero}$ e $\alpha(M^t_1) = \text{vero}$ in quanto esiste uno e un solo i tale che $\alpha(M^t_i) = \text{vero}$ e non esistono quintuple che partono da $q_1 = q_A$

se $E(x)$ è soddisfacibile allora $x \in L_\Gamma$

- supponiamo, ora, che esista una assegnazione di verità α che soddisfa $E(x)$
- α corrisponde ad una sequenza $SG^1, \dots, SG^{p(|x|)-1}$ di stati globali di NT_Γ
 - dove, per ogni $t = 0, 1, \dots, p(|x|)-1$, SG^t è lo stato globale corrispondente a $\alpha(s^t)$ e s^0 corrisponde allo stato globale iniziale di $NT_\Gamma(x)$
- inoltre, per ogni $t = 0, 1, \dots, p(|x|)-1$, se $\alpha(g^t) = \text{vero}$ allora viene eseguita una quintupla che fa passare da SG^t a SG^{t+1} ,
- D'altra parte, poiché α soddisfa $E(x)$, allora deve essere $\alpha(M^{p(|x|)}_1) = \text{vero}$
 - e questo significa che esiste un indice h tale che $\alpha(M^h_1) = \text{vero}$
 - e che (come è facile verificare), per ogni $t \geq h$, $\alpha(M^t_1) = \text{vero}$
- sia $u \in \{0, 1, \dots, p(|x|)\}$ il primo intero tale che $\alpha(M^u_1) = \text{vero}$
 - ossia, per ogni $t = 0, 1, \dots, u-1$, $\alpha(g^t) = \text{vero}$
 - e, quindi, per ogni $t = 0, 1, \dots, u-1$, viene eseguita una quintupla che fa passare da SG^t a SG^{t+1}
- allora $\langle SG_0, SG_1, \dots, SG^u \rangle$ è una computazione accettante di $NT_\Gamma(x)$
- e, quindi, $x \in L_\Gamma$

Quanto costa calcolare $E(x)$?

- ▀ A partire da NT_T e da $x \in \{0,1\}^*$ abbiamo ottenuto

$$E(x) = \mathcal{H} \wedge \mathcal{S}^1 \wedge (M^1_1 \vee \mathcal{G}^1) \wedge \mathcal{S}^2 \wedge (M^2_1 \vee \mathcal{G}^2) \wedge \dots \\ \dots \wedge \mathcal{S}^{p(|x|)-1} \wedge (M^{p(|x|)-1}_1 \vee \mathcal{G}^{p(|x|)-1}) \wedge \mathcal{S}^{p(|x|)} \wedge M^{p(|x|)}_1$$

- ▀ Ricordiamo che stiamo mostrando che L_T è riducibile polinomialmente a SAT (senza curarci della forma congiuntiva normale)
 - ▀ e che, quindi, abbiamo mostrato come trasformare x in $E(x)$
 - ▀ la macchina NT_T gioca il ruolo di costante: non è l'istanza!
- ▀ Ma quanto tempo occorre a calcolare $E(x)$ a partire da NT_T e da $x \in \{0,1\}^*$?
- ▀ È facile verificare che, per ogni $t = 0, 1, \dots, p(|x|)$, calcolare $\mathcal{S}^t$ e $\mathcal{G}^t$ richiede $O(p(|x|))$ passi
 - ▀ e, quindi, calcolarli tutti richiede $O([p(|x|)]^2)$ passi
- ▀ Calcolare $\mathcal{H}$ richiede un numero di passi proporzionale a $p(|x|)$
- ▀ In conclusione, calcoliamo $E(x)$ in $O([p(|x|)]^2)$ passi

Il Teorema di Cook-Levin

- Abbiamo considerato un qualunque $L_T \in NP$, e da $x \in \{0,1\}^*$ abbiamo costruito

$$E(x) = \mathcal{H} \wedge \mathcal{S}^1 \wedge (M^1_1 \vee \mathcal{G}^1) \wedge \mathcal{S}^2 \wedge (M^2_1 \vee \mathcal{G}^2) \wedge \dots \\ \dots \wedge \mathcal{S}^{p(|x|)-1} \wedge (M^{p(|x|)-1}_1 \vee \mathcal{G}^{p(|x|)-1}) \wedge \mathcal{S}^{p(|x|)} \wedge M^{p(|x|)}_1$$

- e abbiamo dimostrato che $E(x)$ è calcolabile in $O([p(|x|)]^2)$ passi
- e abbiamo dimostrato che $x \in L_T$ se e soltanto se $E(x)$ è soddisfacibile
- Come abbiamo osservato, $E(x)$ non è in forma congiuntiva normale
- Tuttavia, è semplice trasformare $E(x)$ in forma congiuntiva normale
 - è sufficiente applicare le leggi distributive di $\wedge$ e $\vee$, separatamente, a ciascun $\mathcal{S}^i$ e $\mathcal{G}^i$
 - ma non lo facciamo!
- e questo richiede $O(p(|x|))$ passi
 - anche se non lo dimostriamo
- E, poiché l'algoritmo non deterministico che abbiamo utilizzato per mostrare che $3SAT \in NP$ prova anche che $SAT \in NP$, questo completa la dimostrazione del Teorema di Cook-Levin:

SAT è NP-completo